"Local Gauge Invariance"

"Quantum Electrodynamics" → boken Appendix C
(Elektromagnetisk växelverkan)

"Quantum Chromodynamics"
(Stark växelverkan)

"The Glashow-Weinberg-Salam model"
(Elektrosvag växelverkan)

Symmetries

- Space-time symmetries
  - Continuous Space-time symm.
    - Lorentz transformation
    - Translation in space
    - Translation in time
    - Rotation around an axis
  - Discrete Space-time symm.
    - Parity
    - Charge conjugation
    - Time reversal

- Internal symmetries
  - Global symm.
    - Baryon number
    - Lepton number
    - Strangeness
    - Isospin $SU(2)$ flavour
    - Isospin + Hypercharge $SU(3)$ flavour
  - Local gauge symm.
    - Electric charge $U(1)$
    - Weak charge + isospin $U(1) \otimes SU(2)$
    - Colour $SU(3)$

INTERNA SYMMETRIER

Transformationer som verkar på partiklar utan att påverka $\vec{r}$.

Globala symmetrier

Detta är symmetrier där transformationen inte beror av $\vec{r}$. Dvs transformationerna är det samma överallt i universum.

Exempel: $\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(\vec{r})$ där α är en konstant

Lokala symmetrier

Transformationer som beror av $\vec{r}$ dvs är olika i olika punkter i rymden.

Exempel: $\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{i\alpha(\vec{r})}\psi(\vec{r})$

dvs $\alpha(\vec{r}) = \alpha(t, \vec{r})$

QED

Quantum Electro Dynamics

1. Klassisk elektromagnetism
2. Relativistisk elektromagnetism
3. Icke-relativistisk kvantmekanisk elektromagnetism
4. Relativistisk kvantmekanisk elektromagnetism

Klassisk Elektromagnetism

Maxwells ekvationer:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$
$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \cdot V$$
$$\nabla \times \bar{B} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \bar{E} = \varrho$$

där
$\bar{B}$: Det magnetiska fältet
$\bar{E}$: Det elektriska fältet
$\bar{A}$: Vektorpotenialen
V: Skalärpotenialen
$\bar{J}$: Den elektriska strömmen
ϱ: Laddnings densiteten

- Från Maxwells ekvationer får man kontinuitetsekvationen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J} = 0$$

Denna säger att ändringen av laddningen i en volym beror av strömmen av laddning ut från volymens yta dvs ingen laddning skapas eller förstörs.

$\Rightarrow$ Laddningen är konserverad

- Givet fälten $\bar{B}$ och $\bar{E}$ är inte potenialerna V och $\bar{A}$ entydigt bestämda. De transformationer som kan göras på V och $\bar{A}$ utan att ändra $\bar{B}$ och $\bar{E}$ kallas för "gauge transformations":

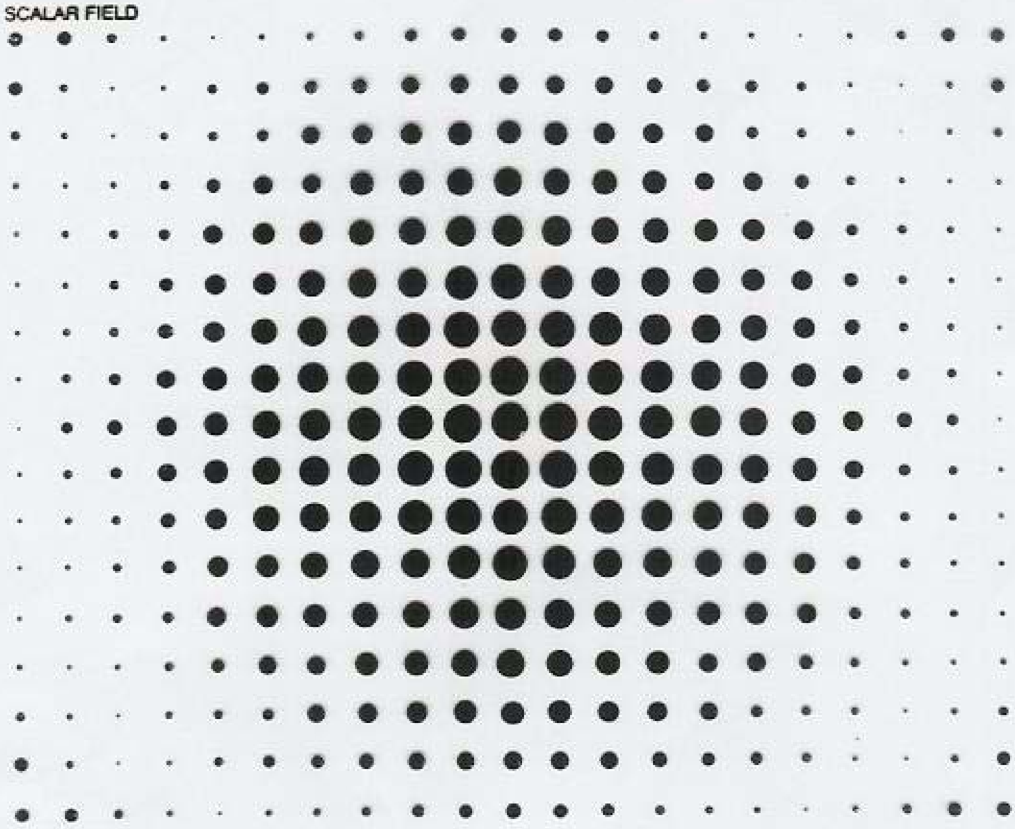
- $$\begin{cases} \bar{A} \rightarrow \bar{A}' = \bar{A} + \nabla \mathcal{X} \\ V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \end{cases}$$

där $\mathcal{X}$ är en valtri funktion

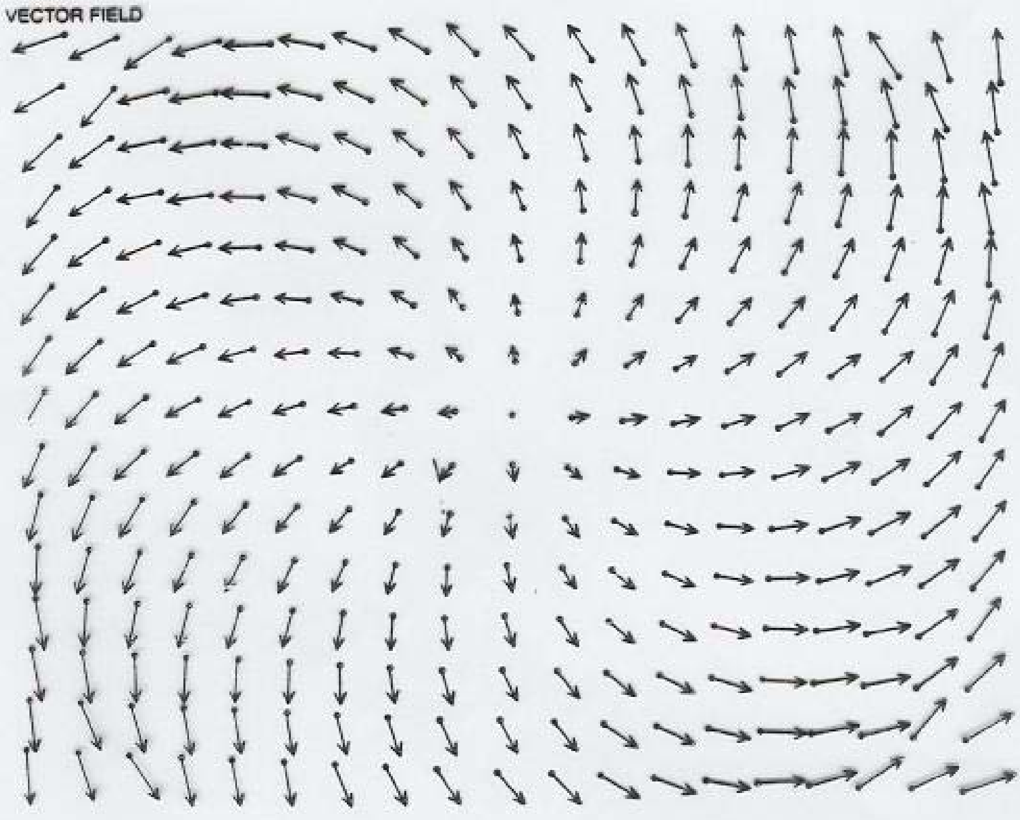
Maxwells ekvationer är invarianta om dessa transformationer utföres ty

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{B}' &= \nabla \times (\bar{A} + \nabla \mathcal{X}) = \nabla \times \bar{A} + \nabla \times \nabla \mathcal{X} = \nabla \times \bar{A} \\ \bar{E}' &= -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{A} + \nabla \mathcal{X}) - \nabla\left(V - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} - \nabla \cdot V + \nabla \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \cdot V \end{aligned}}$$

Skalär fält



Vektor fält



Relativistisk elektromagnetism

Nya beteckningar

$$\vec{A} = A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \bar{A})$$

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A^0, -\bar{A})$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^\mu \cdot B_\mu = A_\mu \cdot B^\mu = A^0\cdot B^0 - \bar{A}\cdot\bar{B} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

$$A^\mu \cdot B^\nu = \begin{pmatrix} A^0B^0 & A^0B^1 & A^0B^2 & A^0B^3 \\ A^1B^0 & A^1B^1 & A^1B^2 & A^1B^3 \\ A^2B^0 & A^2B^1 & A^2B^2 & A^2B^3 \\ A^3B^0 & A^3B^1 & A^3B^2 & A^3B^3 \end{pmatrix} = C^{\mu\nu}$$

$$\vec{P} = P^\mu = (P^0, P^1, P^2, P^3) = (E, \bar{p}) = (E, P_x, P_y, P_z)$$

$$P_\mu = (P_0, P_1, P_2, P_3) = (E, -\bar{P}) = (E, -P_x, -P_y, -P_z)$$

$$\vec{P}\cdot\vec{P} = P^\mu \cdot P_\mu = E^2 - \bar{p}\cdot\bar{p} = E^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2$$

$$\partial^\mu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial^\mu \cdot \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu \cdot \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\gamma^\mu \cdot \partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Exempel:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{där} \quad \begin{cases} \partial^\mu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (V, A_x, A_y, A_z) \end{cases}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & \partial^1 A^1 - \partial^1 A^1 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & \partial^2 A^2 - \partial^2 A^2 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & \partial^3 A^3 - \partial^3 A^3 \end{pmatrix}$$

Maxwells ekvationer:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla V \quad \begin{cases} E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\partial^0 A^1 + \partial^1 A^0 \\ E_y = -\partial^0 A^2 + \partial^2 A^0 \\ E_z = -\partial^0 A^3 + \partial^3 A^0 \end{cases}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad \begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 \\ B_y = -\partial^3 A^2 + \partial^1 A^3 \\ B_z = -\partial^1 A^1 + \partial^2 A^1 \end{cases}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

På samma sätt får man

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

__Exempel:__

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \text{där} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ j^\mu = (\rho, \bar{j}_x, \bar{j}_y, \bar{j}_z) \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \bar{j}_x \\ \bar{j}_y \\ \bar{j}_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{E} = \rho$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \bar{j}_x \\ -\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \bar{j}_y \\ -\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \bar{j}_z \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \nabla \times \bar{B} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Relativistisk elektromagnetism

- Inför följande 4-vektorer

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (V, \bar{A}) = (V, A_x, A_y, A_z)$$
$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \bar{j}) = (\rho, j_x, j_y, j_z)$$
$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

där A^μ kallas för 4-vektor potenielen
j^μ kallas för 4-vektor strömmen
∂_μ kallas för 4-vektor derivatan

- "Gauge" transformationen kan nu skrivas som:

$$\begin{cases} \bar{A} \longrightarrow \bar{A} + \nabla\chi \\ V \longrightarrow V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow A^\mu \longrightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$$

där χ är en valfri funktion

- och kontinuitetsekvationen kan skrivas som:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

- Vi inför också den elektromagnetiska fältstyrketensorn:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

- Från två av Maxwells ekvationer $\begin{cases} \bar{B} = \nabla \times \bar{A} \\ \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla V \end{cases}$ får man då

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- och de andra två Maxwellsekvationer kan då skrivas som:

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{B} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{E} = \rho \end{cases} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Icke-relativistisk kvantmekanisk elektromagnetism

Alternativ I

- Schrödinger ekvationen för en fri partikel är

$$\frac{1}{2m}\bar{p}^2 \cdot \Psi(\bar{r},t) = i\,\frac{\partial \Psi(\bar{r},t)}{\partial t}$$

- Schrödinger ekvationen för en partikel med laddningen q som rör sig i ett elektromagnetiskt fält som ges av potenialerna V och $\bar{A}$ är:

$$\frac{1}{2m}(\bar{p}-q\bar{A})^2\Psi = i\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqV\right)\Psi$$

[Dvs man har gjort substitutionen

$$\begin{cases} \bar{p} \longrightarrow \bar{p}-q\bar{A} \\ \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}+iqV \end{cases} \quad \left(\Rightarrow -i\nabla \rightarrow -i\nabla - q\bar{A} \Rightarrow \nabla \rightarrow \nabla - iq\bar{A}\right)$$

Detta kan med relativistisk notation skrivas som

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$]

- Är Schrödingerekvationen "gauge" invariant på samma sätt som Maxwells ekvationer? Svar: Nej

- Men Schrödingerekvationen är "gauge" invariant om man kompletterar denna transformation med en $U(1)$ transformation:

U(1) gauge transformation:
$$\begin{cases} \bar{A} \longrightarrow \bar{A}+\nabla\chi \\ V \longrightarrow V-\frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \Psi \longrightarrow e^{iq\chi}\Psi \end{cases}$$

Alternativ II

- Anta att S.E. inte är känd men vi vet att elektromagnetism beskrivs av en lokal $U(1)$ transformation dvs vi vet att följande ska gälla:

$$\psi \to \psi' = e^{iq\chi}\psi \quad \text{där} \begin{cases} q \text{ är en konstant} \\ \chi = \chi(\vec{r}) \text{ är en valfri funktion} \end{cases}$$

- Schrödinger ekvationen för en fri partikel

$$\frac{1}{2m}\bar{p}^2\,\psi(\bar{r},t) = i\,\frac{\partial\psi(\bar{r},t)}{\partial t}$$

är <u>inte</u> invariant om man gör en lokal $U(1)$ transformation.

- För att invarians ska gälla måste $\bar{A}$ och V införas med

$$\begin{cases} \bar{A} \to \bar{A}' = \bar{A} + \nabla\chi \\ V \to V' = V - \dfrac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases}$$

- och Schrödingerekvationen måste modifieras till

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\bar{p} - q\bar{A}\right)^2 + qV\right]\psi(\bar{r},t) = i\,\frac{\partial\psi(\bar{r},t)}{\partial t}$$

- dvs Schrödingerekvationen för en partikel i ett elektromagnetiskt fält kan fås från Schrödingerekvationen för en fri partikel + "local $U(1)$ gauge invariance".

Relativistisk kvantmekanisk elektromagnetism

(Quantum Electro Dynamics – QED)

- Med våra nya beteckningar kan vi skriva Dirac ekvationen på följande sätt:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0$$

[där $\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3 = \gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial z}$

$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ är en Dirac spinor

m = partikelns massa (tex elektronens massa)]

- Dirac ekvationen kan fås genom att man minimerar Lagrangian för en fri elektron:

$$\mathcal{L}_e = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad \left(= \text{elektronens kinetiska energi}\right)$$

[där $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$]

- Adderar man termen $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ till $\mathcal{L}_e$ får man en ny Lagrangian:

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

fotonens kinetiska energi

Från $\mathcal{L}_0$ kan man med hjälp av lagen "of least action" få fram både Dirac ekvationen och Maxwells ekvationer för fria partiklar.

- $\mathcal{L}_0$ är emellertid <u>inte</u> invariant under lokal $U(1)$ transformation dvs under transformationen

$$\Psi \longrightarrow e^{iq\chi(\vec{r})}\Psi$$

- I det icke-relativistiska fallet såg vi att Schrödingerekvationen blev $U(1)$ invariant om vi gjorde substitutionen

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + iqA_\mu$$

- Gör vi denna substitution i $\mathcal{L}_0$ får vi

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \underbrace{- q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi}$$

beskriver växelverkan mellan fermioner som ges av Ψ och fotoner som ges av A_μ

- Är $\mathcal{L}$ invariant under en lokal U(1) transformation? Dvs efter transformationen

$$\Psi \longrightarrow e^{iq\chi(\vec{r})}\Psi$$
$$\bar{\Psi} \longrightarrow e^{-iq\chi(\vec{r})}\bar{\Psi}$$

ska följande gälla: $\mathcal{L}(\Psi) = \mathcal{L}(\Psi')$

- Efter U(1) transformationen har vi

$$\mathcal{L}' = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\chi$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\chi$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\chi$$

Svar: NEJ!

- För att få $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ måste vi dessutom göra en "gauge" transformation:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\chi$$

för då får vi

$$\mathcal{L}' = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi \underbrace{- q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\chi + q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\chi}_{0}$$

dvs

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$$

Om man kombinerar en lokal U(1) transformation med en "gauge" transformation får man $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$!

Summering

En Lagrangian för elektromagnetisk växelverkan kan erhållas från Lagrangian för en fri elektron genom följande operationer:

I) Inför A_μ och gör substitutionen

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

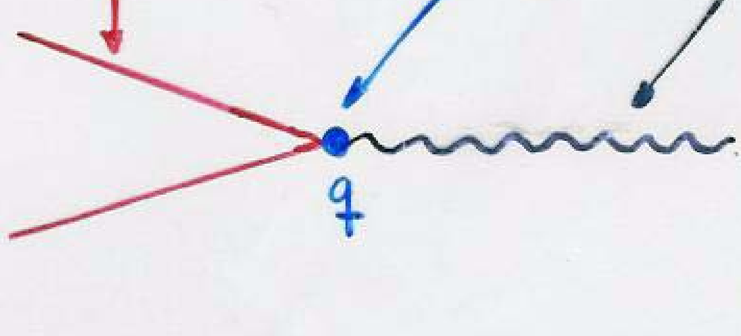
II) Inför "the electromagnetic field-strength tensor" $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

III) Kräv att $\mathcal{L}$ är invariant under en "local U(1) gauge transformation":

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow e^{iq\chi}\psi \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi \end{cases} \quad \text{där } \chi = \chi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{} \underbrace{- q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi}_{} \underbrace{- \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{}$$



QED

Summering i ord:

- Observationen att laddningen är lokalt konserverad leder till att man vill utveckla en teori som är invariant för vissa typer av transformationen.
- Dessa s.k. "gauge" transformationer av typ U(1) kan uppfattas som en grupp av rotationer av vågfunktionerna i ett abstrakt en-dimentionellt "charge space".
- Storleken på rotationen är olika i olika punkter i den 4-dimentionella Minkowski rymden dvs transformationerna är lokala.
- "Local U(1) gauge invariance" leder till att man måste införa ett elektromagnetiskt fält ($\vec{A}$) vilket har masslösa kvanta (fotoner) vilka kopplar på ett unikt sätt till laddade partiklar (tex elektroner)