# "Space-time symmetries"

Kontinuerliga symmetrier $\longrightarrow$ se boken 4.1+4.2

Diskreta symmetrier $\longrightarrow$ se boken 4.3+4.4+4.6

# "SPACE-TIME SYMMETRIES"

Som namnet anger är detta transformationer som påverkar rymds- och tidskoordinater. Det vill säga det är transformationer av 4-vektor rymden (Minkowski space).

## "Continuous space-time symmetries"

Kontinuerliga transformationer kan sägas äga rum genom en serie infinitesimala steg.

## "Discrete space-time symmetries"

Diskreta transformationer är grupper med bara två element dvs bara två olika transformationer är möjliga.

# "Translation in space"

- Fysikens lagar är de samma i Malmö och Lund.
- Klassiskt: $(t, \bar{r}) \longrightarrow (t', \bar{r}') = (t, \bar{r} + \bar{a})$
- Kvantmekaniskt:

En dimension:

Denna typ av transformation innebär att $x' = x + \varepsilon$

dvs $\psi' = \hat{U}\psi(x) = \psi(x+\varepsilon) = \psi(x) + \varepsilon \frac{d\psi}{dx} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \frac{d\psi}{dx} + \ldots$

$\Rightarrow \quad \hat{U} \approx 1 + \varepsilon \frac{d}{dx}$

Eftersom $\hat{p}_x = -i\frac{d}{dx}$ så blir

$$\hat{U} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{i}\hat{p}_x = 1 + i\varepsilon\hat{p}_x$$

$\varepsilon$ är infinitesimal men gör man $n$ successiva transformationer med $\alpha = n \cdot \varepsilon$ så får man

$$\hat{U} = \left(1 + i\frac{\alpha}{n}\hat{p}_x\right)^n = e^{i\alpha\hat{p}_x} \quad \text{när } n \to \infty$$

Tre dimensioner:

$$\psi' = \hat{U}\psi(\bar{r}) = \psi(\bar{r} + \delta\bar{r}) = \psi(\bar{r}) + \delta\bar{r}\frac{d\psi}{d\bar{r}} + \ldots$$

$$\hat{U} \approx 1 + \delta\bar{r}\frac{d}{d\bar{r}} = 1 + i\varepsilon\nabla = 1 + i\varepsilon\hat{p}$$

$$\hat{U} = \left(1 + i\frac{\alpha}{n}\hat{p}\right) = e^{i\alpha\hat{p}} \quad \text{när } n \to \infty$$

- $\hat{U}$ är en unitär operator som tillhör gruppen $U(1)$ med generatorn $= \hat{p}$

- Om $\mathcal{L}$ är invariant under transformationen $\hat{U}$ gäller:

$$[\hat{U}, \mathcal{L}] = 0$$

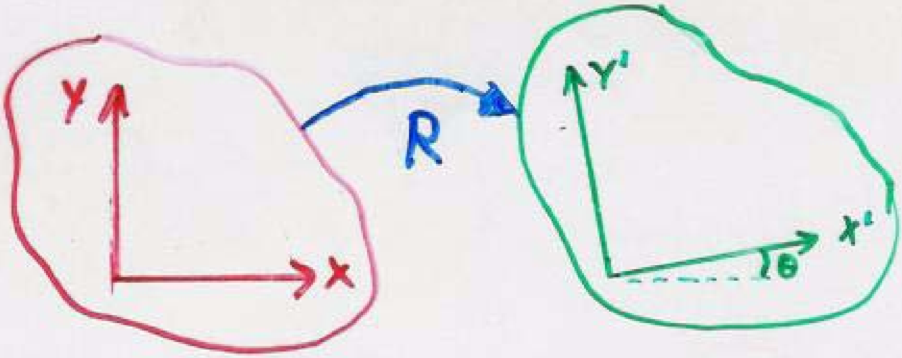
- Noethers theorem säger då att det finns kvantal som ges av gruppen $\hat{U}$'s generator $\hat{p}$ vilka är konserverade

$$\Rightarrow$$

Rörelsemängden är konserverad.

# Rotation runt en axel

- Klassiskt:




$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Kvantmekaniskt:

Rotation kring z-axeln:

En infinitesimal rotation $\delta\theta$ kan skrivas

$$\begin{cases} x' = x - \delta\theta \cdot y \\ y' = y + \delta\theta \cdot x \\ z' = z \end{cases}$$

Inför en rotationsoperator $\hat{R}_z$ sådan att

$$\psi' = \hat{R}_z \psi(\bar{r}) = \psi(x - \delta\theta \cdot y, y + \delta\theta \cdot x, z)$$

utvecklar vi i $\delta\theta$ får vi

$$\hat{R}_z \psi \approx \psi - \delta\theta \left( y \frac{\partial\psi}{\partial x} - x \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \text{högre termer}$$

$$\hat{R}_z \approx 1 - \delta\theta \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

eftersom $\hat{L}_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Rightarrow$

$$\hat{R}_z = 1 + i\,\delta\theta\,\hat{L}_z$$

$n$ succesiva transformationer med $\Delta\theta = n \cdot \delta\theta$ ger

$$\hat{R}_z = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + i\,\delta\theta\,\hat{L}_z \right)^n = e^{i\Delta\theta \hat{L}_z}$$

- Om $\mathcal{L}$ är invariant under transformationen $\hat{R}_z$ leder detta till att det finns kvanttal $L_z$ relaterade till operatorn $\hat{L}_z$ vilka är konserverade.
- Dvs invarians under rotation leder till konservering av rörelsemängdsmoment.

## "Translation in time"

- Klassiskt innebär detta att naturens lagar är de samma igår som i dag.

- Kräver man att $\mathcal{L}$ för en process är invariant under "translation in time" leder detta till att ekvationerna som beskriver processen "konserverar energin".

# Lorentz transformation

- Lorentz gruppen SO(1,3) definieras som den grupp transformationer som gör så att skalärprodukten av två 4-vektorer är invariant.

- Lorentz invarians leder till

  Konservering av energi
  Konservering av rörelsemängd
  Konservering av rörelsemängdsmoment

- Alla typer av växelverkan (e.m., svag, stark) är Lorentzinvarianta och följer konserveringslagarna ovan.

# Paritet

- Transformationen $\bar{r} \rightarrow \bar{r}' = -\bar{r}$

- Paritetsoperatorn $\hat{P}\,\Psi(\bar{r},t) = \Psi(-\bar{r},t) = p\,\Psi(\bar{r},t)$

- Egenvärden $\begin{cases} p = +1 & \text{: jämn paritet} \\ p = -1 & \text{; udda paritet} \end{cases}$

- Dirac ekvationen $\Rightarrow$ $P_f \cdot P_{\bar{f}} = -1$

- Intrinsisk paritet:

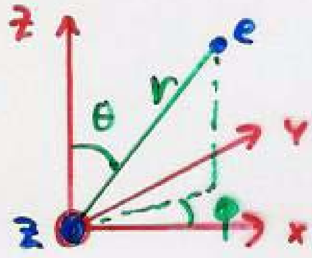
$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} P_{e^-} = P_{\mu^-} = P_{\tau^-} = 1 \\ P_{e^+} = P_{\mu^+} = P_{\tau^+} = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} P_u = P_d = P_s = P_c = P_b = P_t = 1 \\ P_{\bar{u}} = P_{\bar{d}} = P_{\bar{s}} = P_{\bar{c}} = P_{\bar{b}} = P_{\bar{t}} = -1 \end{cases} \end{array}\right\} \text{fermioner och antifermioner har motsatt paritet}$$

$$P_\gamma = -1 \quad \Big\} \text{ bosoner och antibosoner har samma paritet.}$$

- Växelverkan som inte konserverar paritet:

Svag Växelverkan

- Paritet i atomfysik:

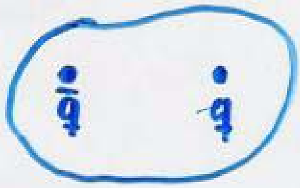



Om potenialen bara beror av r så har Shrödingerekvationen lösningar av typen $\Psi = R_{nl}(r)\, Y_m^l(\theta,\varphi)$

$$\hat{P}\Psi = R_{nl}(r)\,(-1)^l\, Y_m^l(\theta,\varphi)$$

dvs $p = (-1)^l$

- Paritet för en meson




$$P = \underbrace{P_q \cdot P_{\bar{q}}}_{-1} \cdot (-1)^L$$

Observera att paritetskvanttalet är multiplikativt!

- Pariteten i en process:

$$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma$$

$$P_i = \underbrace{P_{e^+} \cdot P_{e^-}}_{-1} \cdot (-1)^{L_{ee}} \qquad P_f = \underbrace{P_\gamma \cdot P_\gamma}_{+1} \cdot (-1)^{L_{\gamma\gamma}}$$

Konservering av paritet $\Rightarrow$ $P_i = P_f$ $\Rightarrow$

$$(-1)^{L_{ee}+1} = (-1)^{L_{\gamma\gamma}}$$

Tex om $L_{ee} = 0 \Rightarrow L_{\gamma\gamma} = 1, 3, 5 \ldots$

# Charge conjugation

- Transformationen: $\Psi_{partikel} \longrightarrow \Psi_{antipartikel}$

- Antipartikel:
  I) Har samma massa som partikeln
  II) Har motsatt laddning
  III) Har motsatt magnetiskt dipolmoment
  IV) Neutrinos har $S_z = -\frac{1}{2}$, Antineutrinos $S_z = +\frac{1}{2}$

- En partikel kan ha sig själv som antipartikel
  tex $\gamma, \pi^0$
  då gäller egenvärdesekvationen

  $\hat{C}|\gamma\rangle = -1|\gamma\rangle$ dvs fotonen har $c = -1$

  $\hat{C}|\pi^0\rangle = +1|\pi^0\rangle$ dvs $\pi^0$ har $c = +1$

- Eller så har partikeln en distinkt antipartikel:
  tex:

$$\underbrace{\begin{matrix} p & \pi^+ & K^+ & e^+ \\ \bar{p} & \pi^- & K^- & e^- \end{matrix}}_{\mathrm{II}+\mathrm{III}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} n \\ \bar{n} \end{matrix}}_{\mathrm{III}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ \bar{\nu}_e & \bar{\nu}_\mu & \bar{\nu}_\tau \end{matrix}}_{\mathrm{IV}}$$

  I så fall finns inga egenvärdesekvationer för en ensam partikel eller antipartikel. Dvs dessa partiklar har inte specifika c-kvanttal

- Däremot kan ett partikel-antipartikel par ha c-kvanttal.

  $\hat{C}|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^L|\pi^+\pi^-\rangle$ dvs $c = (-1)^L$

  $\hat{C}|f\bar{f}\rangle = (-1)^{L+S}|f\bar{f}\rangle$ där $f\bar{f}$ är ett fermionpar

Växelverkan som <u>inte</u> bevarar charge conjugation:

Svag växelverkan

Exempel:
$\eta^0$-mesonen sönderfaller i 39% av fallen till två fotoner. Vad är dess c-kvanttal?

$$\underset{C_i}{\eta^0} \rightarrow \underbrace{\gamma + \gamma}_{C_f = (-1)\cdot(-1)}$$

Om c är konserverat gäller $C_i = C_f = +1$ dvs eta mesonen har $C = +1$ pss som $\pi^0$.

Observera att c-kvanttalet är multiplikativt.

# Time reversal

- Transformation: $t \rightarrow t' = -t$

- T-operatorn: $\hat{T}\Psi(\bar{r},t) = \Psi(\bar{r},-t)$

  $\hat{T}$ är bla inte Hermitisk dvs den har inte reella egenvärden. Detta innebär att det finns inga observabler relaterade till $\hat{T}$.

- "Time reversal" ger inte upphov till några konserveringslagar.

# CPT invarians

- CPT theoremet:
  Alla typer av växelverkan är invariant under en transformation av C-, P- och T-typ om de utförs efter varandra.

- Dvs kvantfältteorierna är CPT-invarianta.

- En konsekvens av CPT theoremet är att partiklar och antipartiklar måste ha samma massa och livstid och detta har också observerats experimentellt.

tex

$$\tau_{\pi^+} - \tau_{\pi^-} < 10^{-3}$$

$$\tau_{\mu^+} - \tau_{\mu^-} < 2 \cdot 10^{-3}$$

$$m_{\pi^+} - m_{\pi^-} < 10^{-3}$$

$$m_{\bar{p}} - m_p < 8 \cdot 10^{-3}$$