Symmetrier

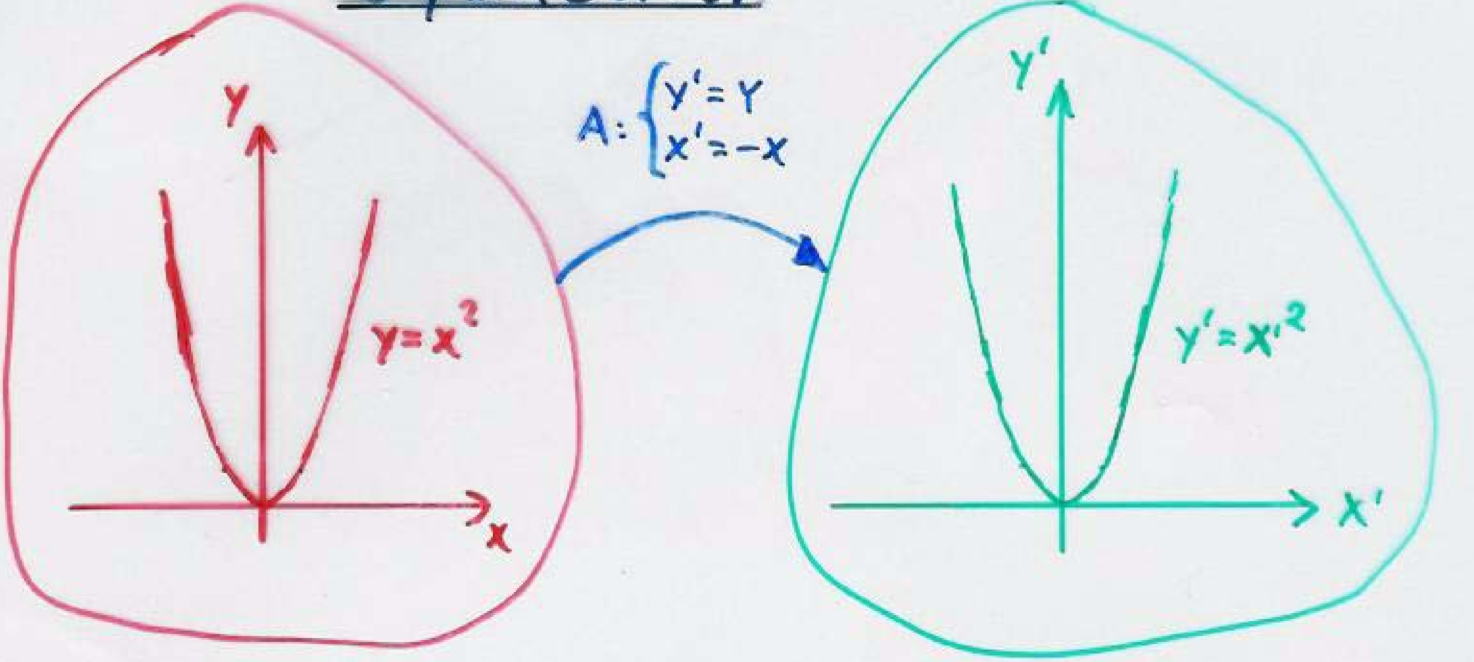
Symmetrier - Allmänt ⟶ boken kap. 4

Kvanttal ⟶ boken 4.2

Konserveringslagar ⟶ boken 4.2

Gruppteori ⟶ boken 6.3

Symmetrier



Ekvationen $y=x^2$ är symmetrisk under transformationen A.
Dvs den ser likadan ut före och efter transformationen.

- Under fysikens historia har fysikerna oftast studerat fysikaliska fenomen och sedan direkt kunnat skriva ner de rörelselagar som beskriver dem.

- Under de sista decennierna har fysikerna insett att man med hjälp av symmetrier kan formulera fysikens lagar.

- Man gör experiment för att studera tex konserveringslagar. Från dessa försöker man räkna ut vilka symmetrier som ligger bakom de fysikaliska fenomenen.

- Med hjälp av en eller flera symmetrier kan man sedan utveckla en teori för sina fysikaliska fenomen.

Symmetri i kvantmekaniken

ψ = vågfunktionen för en partikel

$\mathcal{L}(\psi)$: Lagrangian för en växelverkan

$\hat{U}$

Transformation

$\psi' = \hat{U}\psi$

$\mathcal{L}' = \hat{U}\mathcal{L}(\psi)$

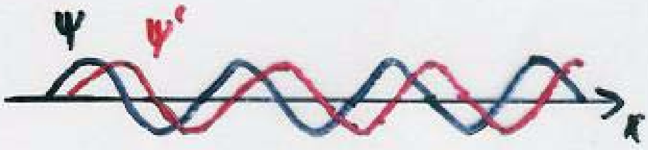
$$\underline{\text{Invarians} \Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}(\psi')}$$

$$[\hat{U}, \mathcal{L}] = 0$$

Exempel:

- Vi har en partikel som beskrivs av en en-dimentionell vågfunktion:

- En Lagrangian $\mathcal{L}(\psi)$ beskriver dess växelverkan.
- Vi vill testa om växelverkan är invariant med avseende på en klass transformationer $\hat{U}$ som tillhör den mattematiska gruppen $U(1)$ dvs $\hat{U} \in U(1)$.
- Dessa transformationer skiftar fasen på vågfunktionerna:



$$\psi' = \hat{U}\psi = e^{i\alpha\hat{F}}\psi$$

- Invarians under $U(1)$ transformation betyder att

$$\hat{U}\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi') \quad \Rightarrow \quad [\hat{U}, \mathcal{L}] = 0$$

- Detta begränsar möjligheterna för hur $\mathcal{L}$ kan se ut och ger oss alltså information om växelverkan.

Kvantal

- Egenvärdes ekvationen: $\hat{A}\Psi_a = a\Psi_a$

  a → egenvärdet

  Ψ_a → egenfunktion

- Om $\hat{A}$ är en operator som beskriver en viss observerbar storhet så ger egenvärdesekvationen för denna operator information om vilka möjliga tillstånd systemet kan befinna sig i. Mäter man variabeln som representeras av $\hat{A}$ så kan värdet bara vara ett av egenvärdena a!

- Exempel:

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}\Psi_n &= E_n\Psi_n \\ \hat{J}^2\Psi_j &= j(j+1)\Psi_j \\ \hat{J}_z\Psi_{j_z} &= j_z\Psi_{j_z} \\ \hat{P}\Psi_p &= p\Psi_p \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

kvanttalen är n, j, j_z, p osv och dessa kan användas för att karakterisera ett tillstånd.

- Om man har ett partikel med n frihetsgrader så behövs det n olika kvanttal för att entydigt klassifiera tillståndet (vågfunktionen) som partikeln befinner sig i.

- Men man måste se till att man väljer kvantal som hör samman med operatorer som kommuteran för annars kan man inte bestämma kvantalen samtidigt

dvs $[\hat{H}, \hat{J}^2] = [\hat{H}, \hat{J}_z] = [\hat{J}_z, \hat{J}^2] = [\hat{J}^2, \hat{P}] = \ldots = 0$

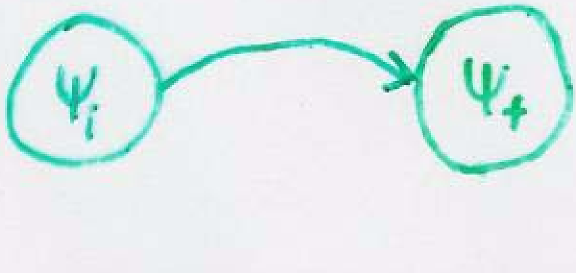
- Exempel:

Vet man att en elektron har 4 frihetsgrader och kvantalen $n=2$ $j=1$ $j_z=-1$ $P=-1$ så finns det en vågfunktion $\Psi_{njj_zP} = \Psi_{21-1-1}$ för vilken gäller att

$$\begin{cases} \hat{H}\,\Psi_{njj_zP} = E_2\,\Psi_{njj_zP} \\ \hat{J}^2\,\Psi_{njj_zP} = 2\,\Psi_{njj_zP} \\ \hat{J}_z\,\Psi_{njj_zP} = -1\,\Psi_{njj_zP} \\ \hat{P}\,\Psi_{njj_zP} = -1\,\Psi_{njj_zP} \end{cases}$$

dvs det finns en gemensam egenfunktion Ψ_{21-1-1} till operatorena $\hat{H}$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$ och $\hat{P}$ med egenvärdena E_2, 2, -1 och -1.

- I vissa reaktioner är vissa kvantal det samma före och efter reaktionen. Man brukar tala om konserverings lagar.



Om kvantalet a är konserverad i reaktionen så gäller att
$$\begin{cases} \hat{A}\,\Psi_i = a\,\Psi_i \\ \hat{A}\,\Psi_f = a\,\Psi_f \end{cases}$$

Symmetrier – Kvanttal – Konserveringslagar

- Om ett kvantal a är konserverat i en reaktion gäller alltså:

$$\begin{cases} \hat{A}\,\psi_i = a\,\psi_f \\ \hat{A}\,\psi_f = a\,\psi_f \end{cases}$$

- Om $\mathcal{L}$ är invariant under en grupp av transformationer $\hat{U}$ gäller att

$$[\mathcal{L}, \hat{U}] = 0$$

dvs $\hat{U}\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\hat{U}\psi)$.

- Noethers theorem:

Finns det en kontinuerlig symmetri för vilken en Lagrangian är invariant så finns det också ett eller flera kvantal som är relaterade till symmetrin och vilka är konserverade.

Dessa kvantal ges av symmetrigruppens generatorer.

- Kontinuerliga Symmetrier $\Rightarrow$ Konserverade kvanttal

Operatorer

Observabel: Operatorer som representerar fysiska kvantiteter (tex $\hat{H}, \hat{r}, \hat{p}$ ..) kallas observabler.

"Adjoint operator": $\int \psi_1^* \hat{A}^+ \psi_2 \, d\bar{r} = \int (\hat{A}\psi_1)^* \psi_2 \, d\bar{r}$

"Hermitian operator": $\hat{A} = \hat{A}^+$

En operator som är "Hermitian" har reella egenvärden. Det finns ett postulat i kvantmekaniken som säger att alla observabler är Hermitiska operatorer.

"Unitary operator": $\hat{U}\hat{U}^+ = 1$

Alla symmetri transformationer (utom "time reversal") kan representeras av unitary operators

"Infinitesimal unitary transformation": $\hat{U} = 1 + i\underset{\text{liten reell parameter}}{\varepsilon}\underset{\text{generator}}{\hat{F}}$

"Finite unitary transformation":

Inför n successiva transformationer med $\alpha = n \cdot \varepsilon$:

$$\hat{U} = \left(1 + i\frac{\alpha}{n}\hat{F}\right)^n = e^{i\alpha\hat{F}} \quad \text{när } n \to \infty$$

Grupp Teori

- Den del av mattematiken som sysslar med symmetrier kallas för grupp teori.

- En grupp är en samling element som beskriver en viss typ av transformationer.

- Tex så är Lorentz gruppen SO(3,1) den uppsättning av linjära transformationer som gör att skalär-produkten av två 4-vektorer är invariant.

- Den en-dimentionella unitära gruppen U(1) innehåller ett antal transformationer där vågfunktionen multipliceras med en fasfaktor $e^{i\alpha\hat{F}}$ dvs
  $\psi' = e^{i\alpha\hat{F}}\psi$ (där α är ett reellt tal och $\hat{F}$ är en operator som kallas gruppens generator)

- SU(2) är en "special unitary group" som har tre stycken 2-dimentionella matriser som generatorer
  $$\Psi' = (\underline{1} + i\varepsilon_j \tfrac{1}{2}\underline{\sigma}_j)\Psi \quad \text{med } j = 1,2,3$$
  I denna grupp är det Pauli matriserna som är generatorer:
  $$\tfrac{1}{2}\underline{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{2}\underline{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{2}\sigma_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

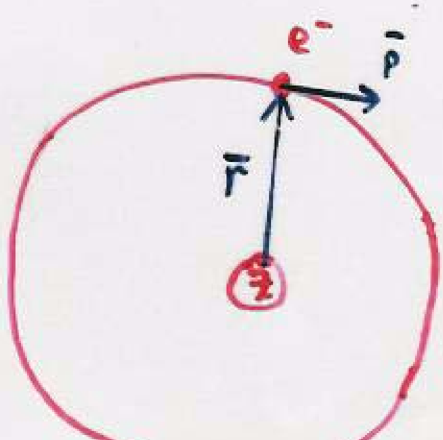
- SU(3) är en "special unitary group" som har 8 stycken 3 dimentionella matriser som generatorer
  $$\Psi' = (\underline{1} + i\varepsilon_j \tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_j)\Psi \quad \text{med } j = 1,2,3,4,5,6,7,8$$
  I denna grupp är det Gell-Mann matriser som är generatorer:
  $$\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\ldots\ldots\; \tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_8 = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vad är en elektrons spinn?

Svar: "Elektronen har också ett egenimpulsmoment, spinn vilket kan uppfattas ha sitt ursprung i rotation kring axel genom elektronen".
(från kompendium i atomfysik)

Svar: "one of the quantum numbers that characterize the particle is its spin, which is defined as the particle's angular momentum in its own rest frame".
(från Particle Physics av Martin+Shaw).

Fråga: Om den klassiska definitionen på "angular momentum" är $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ vad blir då den klassiska definitionen på spinn?



Svar: Spinnet $\hat{S}$ har inte någon klassisk motsvarighet på samma sätt som $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ $(= -i\, \bar{r} \times \nabla)$ har. Spinnet är en inre frihetsgrad som kopplar till ett magnetfält på ett liknande sätt som $\hat{L}$.

$\hat{S}$

- Vi inför spinnoperatorn $\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$
- Det gäller att $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] \neq 0 \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] \neq 0 \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] \neq 0$
- Därimot gäller $[\hat{S}^2, \hat{S}_x] = 0 \quad [\hat{S}^2, \hat{S}_y] = 0 \quad [\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0$
- Det vill säga det finns gemensamma egenfunktioner till $\hat{S}^2$ och $\hat{S}_z$:

$$\begin{cases} \hat{S}^2 \Psi^s_{s_z} = s(s+1)\Psi^s_{s_z} \\ \hat{S}_z \Psi^s_{s_z} = s_z \Psi^s_{s_z} \end{cases}$$

- För elektronen med spinn $s = 1/2$ finns det två egenfunktioner

$$\begin{cases} \hat{S}^2 \Psi^{1/2}_{1/2} = \frac{3}{4}\Psi^{1/2}_{1/2} \\ \hat{S}^2 \Psi^{1/2}_{-1/2} = \frac{3}{4}\Psi^{1/2}_{-1/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{S}_z \Psi^{1/2}_{1/2} = \frac{1}{2}\Psi^{1/2}_{1/2} \\ \hat{S}_z \Psi^{1/2}_{-1/2} = -\frac{1}{2}\Psi^{1/2}_{-1/2} \end{cases}$$

- Beteckningarna för dessa två egenfunktioner kan variera

$$\Psi^{1/2}_{1/2} = \alpha = \left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle = \uparrow = \Psi_u = \text{spinn upp}$$

$$\Psi^{1/2}_{-1/2} = \beta = \left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle = \downarrow = \Psi_d = \text{spinn ner}$$

- En allmän spinn-vågfunktion för elektroner kan då skrivas:

$$\Psi = C_u\alpha + C_d\beta \quad \text{där } |C_u|^2 + |C_d|^2 = 1$$

- Då gäller:

$|C_u|^2$: Sannolikheten att hitta elektronen med $s_z = \frac{1}{2}$

$|C_d|^2$: Sannolikheten att hitta elektronen med $s_z = -\frac{1}{2}$

"Spin space"

- Om alla spinn vågfunktioner (för spinn ½ partiklar) kan skrivas som en linjär kombination av två vågfunktioner α och β kan dessa väljas som bas i ett abstrakt två-dimentionellt Hilbert rum som innehåller alla möjliga spinn vågfunktioner.

- Vi kan införa en matrisrepresentation av våra vågfunktioner och operatorer:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Dvs

$$\begin{cases} \hat{S}^2 \alpha = \frac{3}{4}\alpha \\ \hat{S}^2 \beta = \frac{3}{4}\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{S}_z \alpha = \frac{1}{2}\alpha \\ \hat{S}_z \beta = -\frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

- och

$$\Psi = c_u \alpha + c_d \beta = \begin{pmatrix} c_u \\ c_d \end{pmatrix}$$

- Operatorn $\hat{S}_z$ kan nu sägas orsaka en rotation i vårt två dimentionella Hilbert rum som spänns upp av basen α och β.

SU(2) – Spin, Starkt Isospin, Svagt Isospin

- **Spin:** Inför 2-dimentionellt "spin space" med basen $\Psi_u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\Psi_d = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ så att en godtycklig vågfunktion kan skrivas $\Psi = c_u\Psi_u + c_d\Psi_d$ med $|c_u|^2 + |c_d|^2 = 1$

Isospin: Inför 2-dimentionellt "isospin space" med basen $\Psi_u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\Psi_d = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ så att en godtycklig vågfunktion kan skrivas $\Psi = c_u\Psi_u + c_d\Psi_d$ med $|c_u|^2 + |c_d|^2 = 1$

- **Gruppen:** Gruppen SU(2) imehåller alla 2×2 matriser $\underline{U}$ vilka är
  1) Unitära dvs $\underline{U}\underline{U}^\dagger = \underline{1}$
  2) $\det \underline{U} = 1$

- **Transformationerna $\underline{U}$:**

$$\underline{U} = \underline{1} + i\varepsilon_j \tfrac{1}{2}\underline{\sigma}_j \quad j = 1,2,3 \quad \text{Rotation in spin space}$$

$$\underline{U} = \underline{1} + i\varepsilon_j \tfrac{1}{2}\underline{\tau}_j \quad j = 1,2,3 \quad \text{Rotation in isospin space}$$

- **Parametrarna $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$:**

  ε_j är en infinitesimal reell parameter.

- **Generatorena $\frac{1}{2}\underline{\sigma}_1\ \frac{1}{2}\underline{\sigma}_2\ \frac{1}{2}\underline{\sigma}_3$ och $\frac{1}{2}\underline{\tau}_1\ \frac{1}{2}\underline{\tau}_2\ \frac{1}{2}\underline{\tau}_3$:**

$$\underline{\sigma}_1 = \underline{\tau}_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}_2 = \underline{\tau}_2 = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}_3 = \underline{\tau}_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

dessa matriser kallas för Pauli spin matriser.

- Operatorerna $\hat{S}_1$ $\hat{S}_2$ $\hat{S}_3$ och $\hat{I}_1$ $\hat{I}_2$ $\hat{I}_3$:

$$\begin{cases} \hat{S}_1 = \frac{1}{2}\underline{\sigma}_1 \\ \hat{S}_2 = \frac{1}{2}\underline{\sigma}_2 \\ \hat{S}_3 = \frac{1}{2}\underline{\sigma}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{I}_1 = \frac{1}{2}\underline{\tau}_1 \\ \hat{I}_2 = \frac{1}{2}\underline{\tau}_2 \\ \hat{I}_3 = \frac{1}{2}\underline{\tau}_3 \end{cases}$$

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] \neq 0 \qquad [\hat{I}_i, \hat{I}_j] \neq 0$$

Välj $\hat{S}_3$ och $\hat{I}_3$!

- Kvanttalen s_3 och I_3 :

$$\begin{cases} \hat{S}_3 \Psi_u = \frac{1}{2}\Psi_u \\ \hat{S}_3 \Psi_d = -\frac{1}{2}\Psi_d \end{cases} \Rightarrow \quad s_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \hat{I}_3 \Psi_u = \frac{1}{2}\Psi_u \\ \hat{I}_3 \Psi_d = -\frac{1}{2}\Psi_d \end{cases} \Rightarrow \quad I_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

- Konserveringslagar:

Noethers theorem $\Rightarrow$ S_1 S_2 S_3 och I_1 I_2 I_3 är alla konserverade kvantal!

SU(3) - Colour, flavour

- Colour: Inför 3-dimentionellt "colour space" med basen $\Psi_r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Psi_g = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Psi_b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ så att en godtycklig vågfunktion kan skrivas
  $\Psi = c_r\Psi_r + c_g\Psi_g + c_b\Psi_b$ med $|c_r|^2 + |c_g|^2 + |c_b|^2 = 1$

  Flavour: P.S.S. med basen $\Psi_u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Psi_d = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Psi_s = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

- Gruppen: Gruppen SU(3) innehåller alla 3x3 matriser $\underline{U}$ vilka är
  1) Unitära dvs $\underline{U}\underline{U}^\dagger = \underline{1}$
  2) $\det \underline{U} = 1$

- Transformationerna $\underline{U}$:

$$\underline{U} = \underline{1} + i\varepsilon_j \tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_j \qquad j = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

- Parametrarna ε_1 ε_2 ε_3 ε_4 ε_5 ε_6 ε_7 ε_8:

  ε_j är en infinitesimal reell parameter.

- Generatorerna $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_1$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_2$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_3$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_4$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_5$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_6$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_7$ $\tfrac{1}{2}\underline{\lambda}_8$:

$$\underline{\lambda}_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \underline{\lambda}_2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \underline{\lambda}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \underline{\lambda}_4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad \underline{\lambda}_5 = \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda}_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \underline{\lambda}_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \quad \underline{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

dessa 8 matriser kallas för Gell-Mann matriserna.

- Colour operatorena $\hat{F}_1\ \hat{F}_2\ \hat{F}_3\ \hat{F}_4\ \hat{F}_5\ \hat{F}_6\ \hat{F}_7\ \hat{F}_8$:

$$\hat{F}_i = \frac{1}{2}\underline{\lambda}_i$$

$$[\hat{F}_i, \hat{F}_j] \begin{cases} = 0 & \text{för vissa kombinationer på } i \text{ och } j \text{ tex 3 och 8} \\ \neq 0 & \text{för andra kombinationer på } i \text{ och } j \text{ tex 1 och 2} \end{cases}$$

- Kvanttalen I_3^c och Y^c:

Inför operatorerna

$$\begin{cases} \hat{I}_3^c \equiv \hat{F}_3 \\ \hat{Y}^c \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{F}_8 \end{cases}$$ för dessa gäller att $[\hat{I}_3^c, \hat{Y}^c] = 0$

$$\begin{cases} \hat{I}_3^c \psi_r = \frac{1}{2}\psi_r \\ \hat{I}_3^c \psi_g = -\frac{1}{2}\psi_g \\ \hat{I}_3^c \psi_b = 0\,\psi_b \end{cases}$$ dvs $I_3^c = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$

$$\begin{cases} \hat{Y}^c \psi_r = \frac{1}{3}\psi_r \\ \hat{Y}^c \psi_g = \frac{1}{3}\psi_g \\ \hat{Y}^c \psi_b = -\frac{2}{3}\psi_b \end{cases}$$ dvs $Y^c = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

- Konserveringslagar:

Noethers theorem $\Rightarrow$

Alla kvantal till $\hat{F}_1 \ldots \hat{F}_8$ är konserverade.

Därför gäller också att $\hat{I}_3^c$ och $\hat{Y}^c$ är konserverade.