Kvantmekanik

Schrödingerekvationen
Klein-Gordon ekvationen
Dirac ekvationen

se boken 1.2

Relativistisk kvantmekanik

$\Psi(t,\bar{r})$: Den komplexa vågfunktionen är inte en observabel dvs vi kan beräkna den men vi kan inte mäta den. Trots detta antar vi att total kännedom om Ψ betyder att vi har all information om systemet.

$|\Psi(t,\bar{r})|^2 d^3x$: Sannolikheten att hitta en partikel i volymelementet d^3x i positionen $\bar{r}$ vid tiden t.

$$\left.\begin{aligned} \hat{P} &= -i\nabla \\ \hat{T} &= -\frac{1}{2m}\nabla^2 \\ \hat{E} &= i\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

Operatorer som när de verkar på Ψ ger observerbara storheter.

$$\langle \hat{P} \rangle = \int \Psi^*(t,\bar{r})\, \hat{P}\, \Psi(t,\bar{r})\, d\bar{r} = \int \hat{P}\, |\Psi(t,\bar{r})|^2 d\bar{r}$$

Väntevärdet (eller medelvärdet) av rörelsemängden $\hat{P}$ när systemet befinner sig i tillståndet $\Psi(t,\bar{r})$.

Fri partikel - klassiskt: $E = \frac{1}{2m}\bar{P}^2$

Fri partikel - relativistiskt: $E^2 = m^2 + \bar{P}^2$

Fri partikel - kvantmekaniskt: $i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi(r,t)$
(Schrödinger ekvationen)

Fri partikel - kvantmekaniskt + relativistiskt: $-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = m^2\Psi - \nabla^2\Psi$

(Klein-Gordon ekvationen)

Klein-Gordon ekvationen: $-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = m^2\psi - \nabla^2\psi$ spin=0

PROBLEM: I) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \Rightarrow$ Negativa sannolikheter

II) $E = \pm\sqrt{p^2+m^2} \Rightarrow$ Partiklar med negativ energi

Dirac ekvationen: $-\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \underline{\alpha}_1\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + \underline{\alpha}_2\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + \underline{\alpha}_3\dfrac{\Psi}{\partial z} + im\underline{\beta}\Psi$
(för spin = 1/2 partiklar)

Antaganden:

I) Inför antipartiklar med positiv laddning (positroner) och låt dessa ha negativ energi

II) Inför en vågfunktion med två komponenter $\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_{1/2}\\ \Psi_{-1/2}\end{pmatrix}$ en sk. spinor. $\Psi_{1/2}$ ger sannolikheten att partikeln har spin upp och $\Psi_{-1/2}$ att partikeln har spin ner.

III) Dela vågfunktionen ytterligare för att ta hänsyn till att det finns både partiklar och antipartiklar. Inför därför en vågfunktion med fyra komponenter:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}$$

Dirac ekvationen

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \underline{\alpha}_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} + im\, \underline{\beta}\, \Psi$$

där $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ och $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3$ och $\underline{\beta}$ är matriser

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ -\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \\ -\frac{\partial \psi_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial \psi_4}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial z} \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial \psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + im\, \psi_1 \\ -\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + im\, \psi_2 \\ -\frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - im\, \psi_3 \\ -\frac{\partial \psi_4}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - im\, \psi_4 \end{cases}$$

track is 23 MeV/c, corresponding to either a slow-moving proton

Upptäckten av positronen

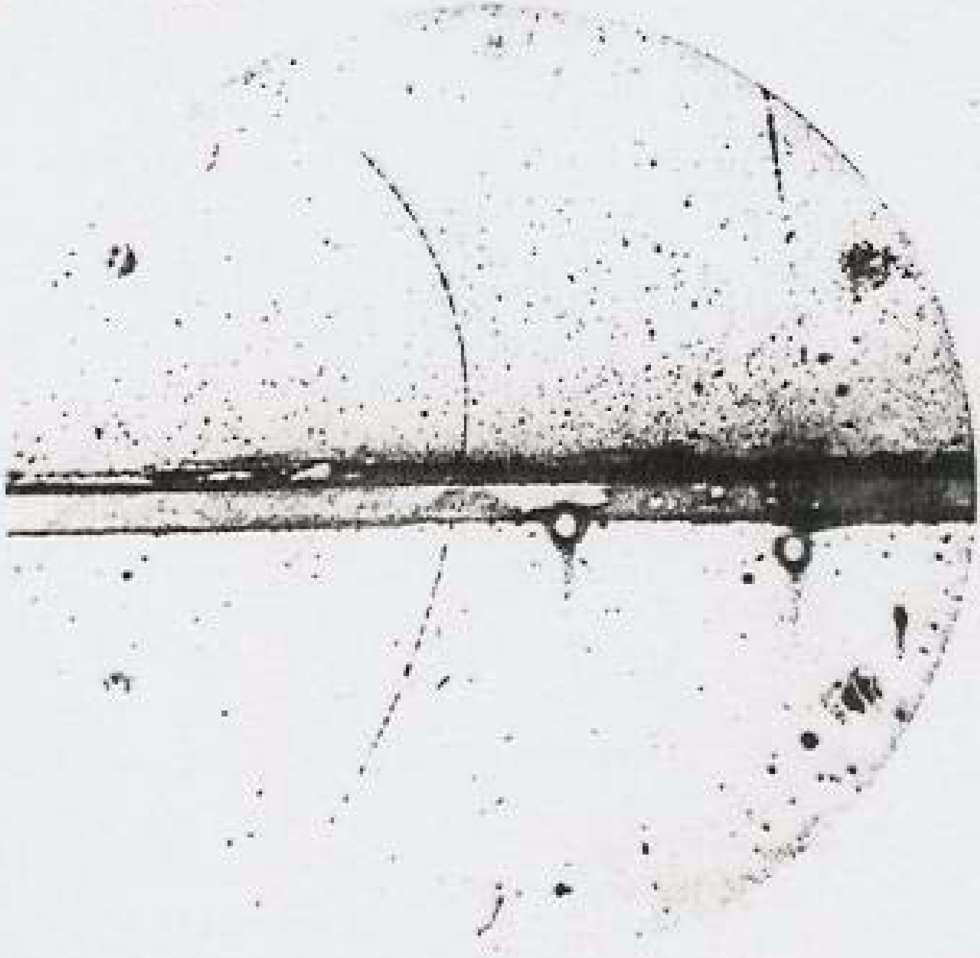


Fig. 1.2 One of the first positron tracks observed by Anderson in a Wilson cloud chamber. The band across the centre of the picture is a lead plate, inserted to slow particles down. The positive sign of the charge and the particle's momentum are deduced from the curvatures of the tracks in the applied magnetic field. That it is a positron, and not a proton, follows from the long range of the upper track. (C. D. Anderson, *Physical Review* **43** (1933) 491.)

Feynman diagram

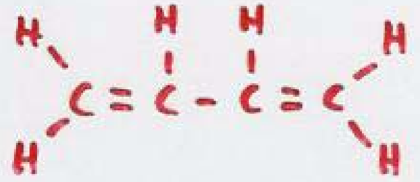
Feynmandiagram
Virtuella fotoner } se boken 1.3

Störningsräkning → se stencil

Feynman Diagram

Figurer som åskådliggör hur partikelfysik reaktioner äger rum. Är mycket användbara vid beräkningar av hur sannolika olika reaktioner är (dvs vilken trättyta de har).

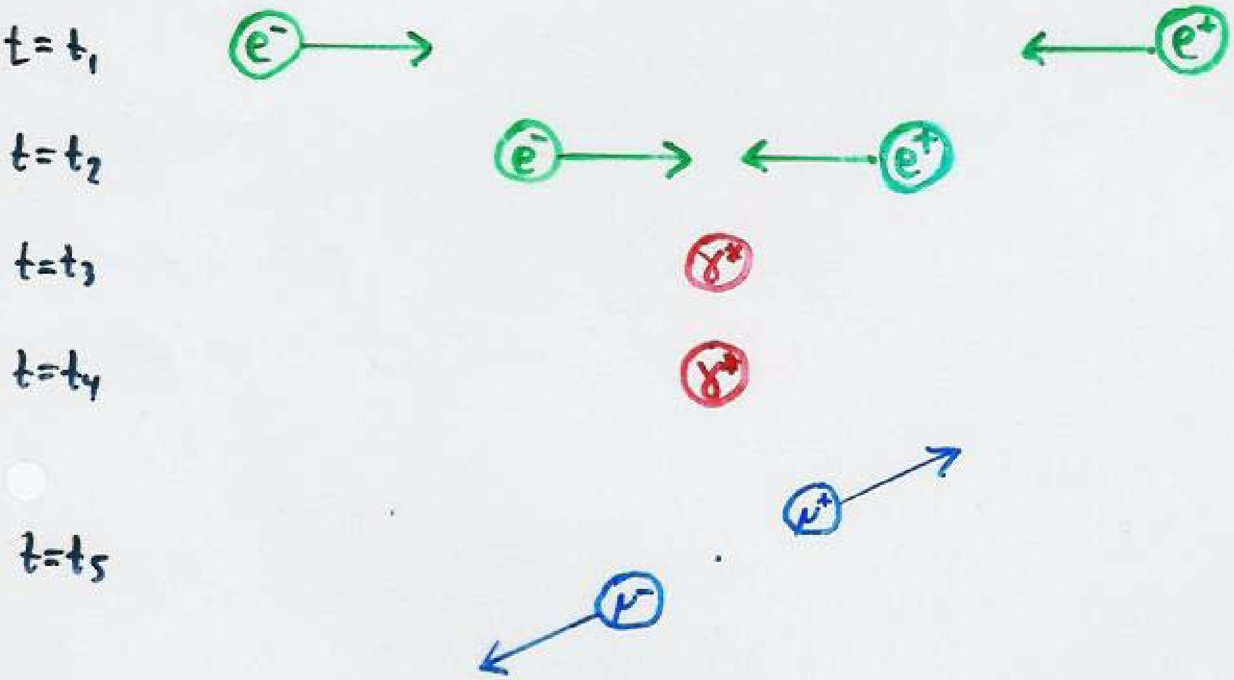
Jämför med kemin:

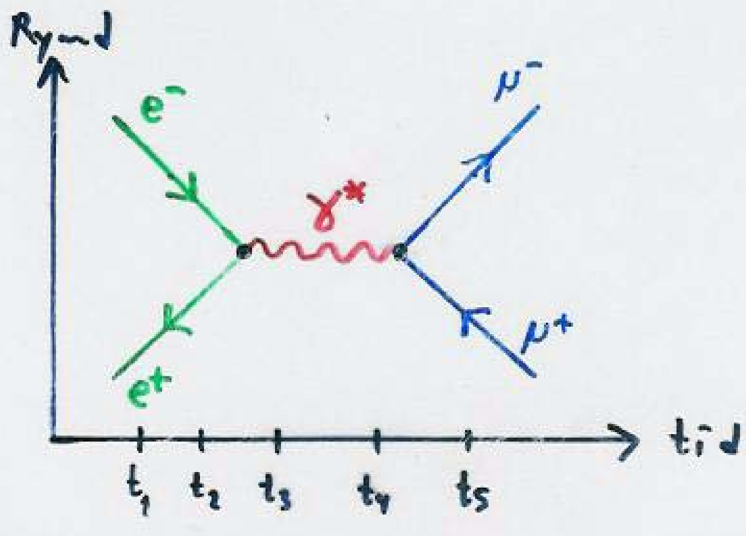


Butadien molekyl C_4H_6

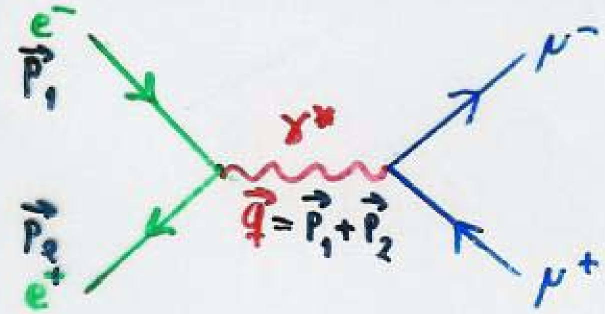
Exempel: e^+e^--kollision i vilket ett $\mu^+\mu^-$-par bildas.

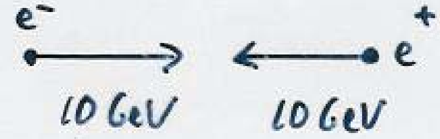
$$e^+ + e^- \longrightarrow \mu^+ + \mu^-$$





Vad är virtuella fotoner?





Anta $\vec{P}_1 = (10, 0, 0, 10)$ GeV och $\vec{P}_2 = (10, 0, 0, -10)$ GeV

Vad är vilomassan för γ^*?

$$m_{\gamma^*}^2 = \vec{q} \cdot \vec{q} = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2 = 4E_e^2 = 400 \text{ GeV}$$

Men hur är detta möjligt? Vi vet ju att fotonens vilomassa är 0 GeV ???

Svar:

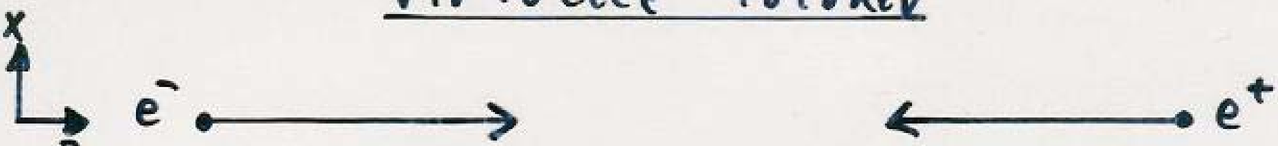
Heisenbergs osäkerhetsrelation gör det möjligt för fotoner att existera med en massa $\neq 0$ så länge det sker under en tidsperiod $\Delta t \lesssim \hbar / \Delta E$.

$$\begin{cases} \Delta t \cdot \Delta E \lesssim \hbar \\ \Delta x \cdot \Delta E \lesssim \hbar c \end{cases}$$

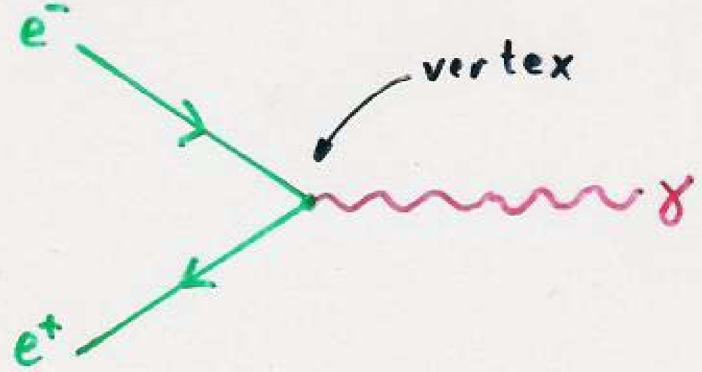
Kortlivade partikeltillstånd med massan $\neq$ vilomassan kallas för virtuella och sägs ha en virtuell massa.

Fria partiklar kan aldrig vara virtuella och dessa kallas därför för reella partiklar och sägs vara på masskalet.

Virtuella fotoner



$\vec{P}_{e^-} = (E_e, 0, 0, P_e)$ $\vec{P}_{e^+} = (E_e, 0, 0, -P_e)$



Konservering av laddning: $Q_{e^-} + Q_{e^+} = Q_\gamma$

$-1 + 1 = 0$

Konservering av Energi: $E_\gamma = E_e + E_e = 2E_e$

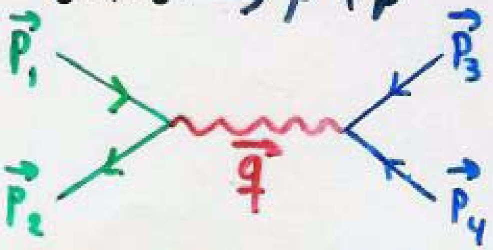
Konservering av rörelsemängd: $\bar{P}_\gamma = \bar{P}_{e^-} - \bar{P}_{e^+} = \bar{0}$

$$E_\gamma^2 = p_\gamma^2 + m_\gamma^2 \Rightarrow 4E_e^2 = m_\gamma^2 \quad ?$$

0 ???

"Time-like photon"

$$e^+ + e^- \longrightarrow \mu^+ + \mu^-$$



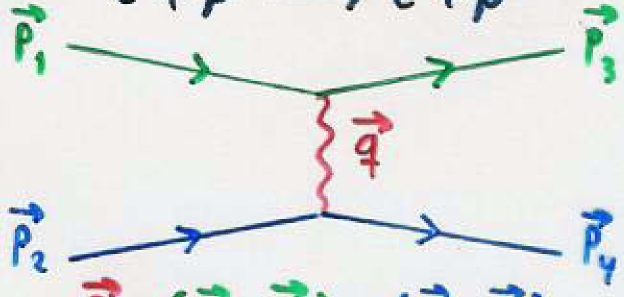
$$\vec{q} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\vec{p}_3 + \vec{p}_4)$$

$$m^2_{\gamma*} = \vec{q} \cdot \vec{q} = s > 0$$

"s-channel exchange"

"Space-like photon"

$$e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$$



$$\vec{q} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_3) = (\vec{p}_2 - \vec{p}_4)$$

$$m^2_{\gamma*} = \vec{q} \cdot \vec{q} = t < 0$$

"t-channel exchange"

Störningsräkning

(eng. Perturbation theory)

Schrödingerekvationen: $i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$

Hamilton operatorn: $H = H_0 + H'$

Egenfunktioner till H_0: $H_0 u_n = E_n u_n$

Matriselement: $\langle k|H'|l\rangle = \int u_k^* H' u_l \, d\bar{r}$

Övergångssannolikhet: $P \sim |\langle f|H|i\rangle|^2$ där

$$\langle f|H|i\rangle = \langle f|H'|i\rangle + \sum_n \frac{\langle f|H'|n\rangle\langle n|H'|i\rangle}{E-E_n} + \sum_{n,m} \frac{\langle f|H'|n\rangle\langle n|H'|m\rangle\langle m|H'|i\rangle}{(E-E_n)(E-E_m)}$$

$$+ \sum_{n,m,k} \ldots\ldots$$

dvs

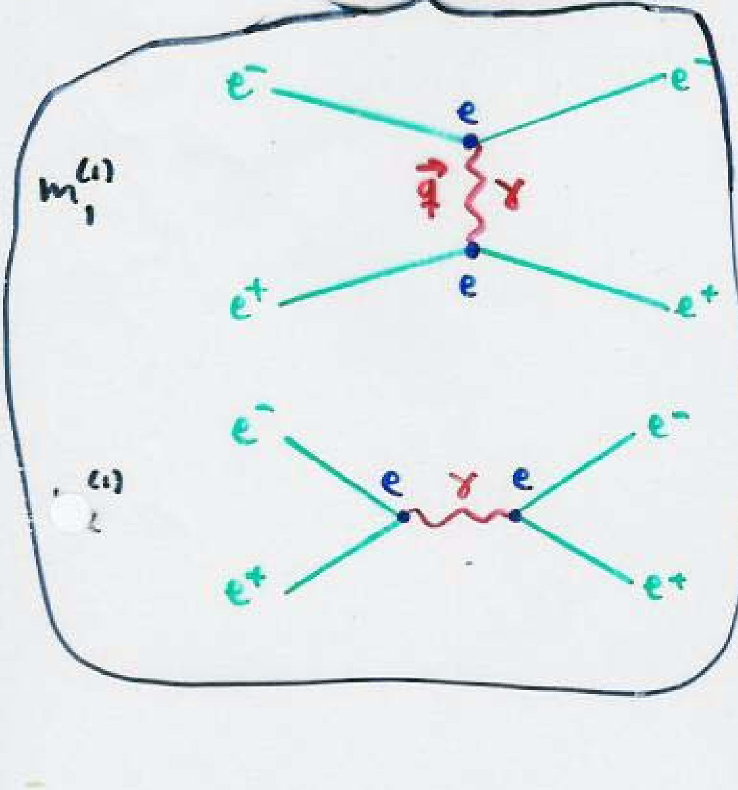
$\langle f|H|i\rangle$ = 0:te ordningens matris element + 1:a ord. matriselement + 2:a ordningens matris element + ...

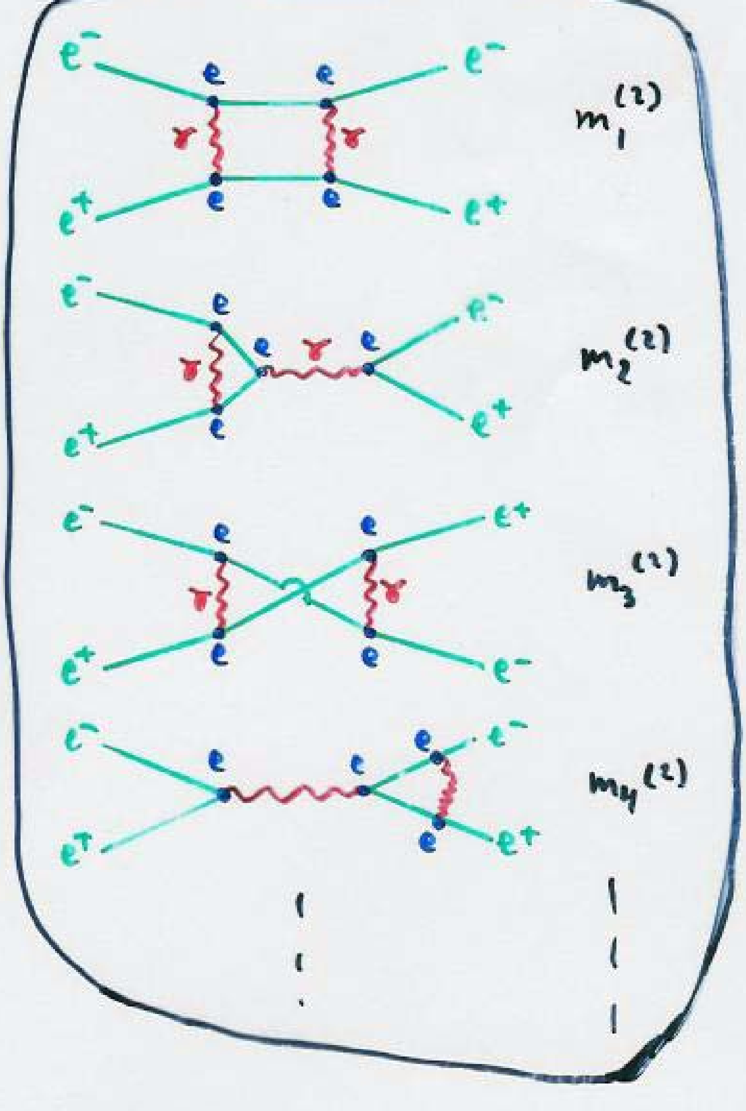
Störningsräkning med Feynmandiagram

Exempel: Vad är sannolikheten för processen $e^+e^- \to e^+e^-$?

1. Bestäm vad initial och final tillstånden är.
2. Välj alla Feynmandiagram med vilka man kan förbinda initial och finaltillstånd.
3. Bestäm den kvantmekaniska amplituden för varje diagram.
4. Sannolikheten för processen blir då $P \sim |M|^2$

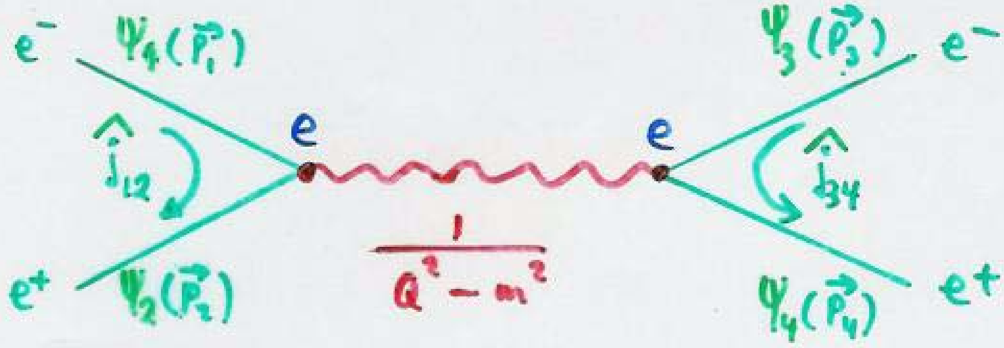
$$M = \underbrace{m_1^{(1)} + m_2^{(1)}}_{\text{första ordningens diagram}} + \underbrace{m_1^{(2)} + m_2^{(2)} + m_3^{(2)} + m_4^{(2)} + \ldots}_{\text{andra ordningens diagram}}$$





Utvärdering av ett Feynman diagram

$m_2^{(1)}$



$$m_2^{(1)} \sim e\langle \Psi_2|\hat{j}_{12}|\Psi_1\rangle \cdot \frac{1}{\vec{q}\cdot\vec{q}-m^2} \cdot e\langle \Psi_4|\hat{j}_{34}|\Psi_3\rangle$$

$\Psi_1\ \Psi_2\ \Psi_3\ \Psi_4$: Vågfunktioner för inkommande och utgående partiklar. I detta fall elektronen.

e: Kopplingskonstanten. I detta fall elektronladdningen.

$\hat{j}_{12}\ \hat{j}_{34}$: "Current density operators". Beskriver flöded av laddning. I detta fall elektrisk laddning.

$G = \frac{1}{\vec{q}\cdot\vec{q}-m^2}$: "The propagator term"

$Q^2 = \vec{q}\cdot\vec{q}$: Den virtuella massan.

m: Vilomassan

Om partikeln som förmedlar växelverkan är en foton så blir $G_\gamma = \frac{1}{Q^2}$

Om partikeln som förmedlar växelverkan är en Z-boson så blir $G_Z = \frac{1}{Q^2-m_Z^2}$

Eftersom m_Z är mycket stor (92 GeV) så blir svag växelverkan mycket mer osannolik än elektromagnetisk växelverkan

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ Finstrukturkonstanten

Om P_1 är sannolikheten för första ordningens processer och P_2 är sannolikheten för andra ordningens processer gäller $\frac{P_2}{P_1} \sim \frac{\alpha^4}{\alpha^2} = \alpha^2 \approx \left(\frac{1}{137}\right)^2$

Lagrange formalism

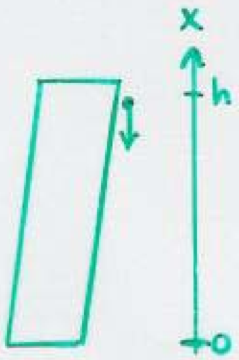
Lagrangefunktionen
"The principle of least action" $\Big\}$ se stencil

Lagrange rörelseekvation

Newton: Rörelselagarna som innehåller krafter är postulerade.

Lagrange + Hamilton: En potenial är postulerad. En kropp kommer sedan att följa en viss bana som bestäms av lagen för "the least action".

Exempel:



Släpp en sten från det lutande tornet i Pisa.

Lagrange funktionen: $L = E_k - E_p$ (jmf $H = E_k + E_p$)

eller mer allmänt $L(q(t), \dot{q}(t)) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q})$

där $q(t)$ är positionen vid tiden t
$\dot{q}(t)$ är hastigheten vid tiden t

Exempel:

$$q(t) = x$$
$$\dot{q}(t) = \dot{x}$$
$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$$

Lagen om "the least action"

"Action" S definieras som $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt$

Lagen om "the least action" säger att
"En kropp följer den rörelsebana som gör att S blir minimum".

Euler-Lagrange rörelselag

$$S = \text{minimum} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Exempel:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -mg = F$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$F = m \cdot a$ Newtons rörelselag

Lagrange formulism i kvantmekanik

I kvantmekanik kan man antingen göra som Schrödinger och låta vågfunktionerna bero av t men inte operatorerna.

Eller använda sig av Heisenbergs beskrivning och låta operatorerna bero av t men inte vågfunktionerna.

Med Heisebergs beskrivning blir det naturligt att översätta $q(t)$ och $\dot{q}(t)$ med operatorer.

Relativitetsteori

För att ta hänsyn till relativistiska effekter inför vi "The Lagrangian density function" $\mathcal{L}$ som definieras:

$$L = \int \mathcal{L} \, d\bar{r}$$

och då gäller:

$$S = \int \mathcal{L} \, d\vec{r}$$

Summering: I den kvantmekanik som vi har arbetat med (Schrödinger formulism) gäller det att hitta Hamilton-operatorn för ett system. Har man H kan man sedan i princip beräkna sannolikheter av olika slag.

I teoretisk partikelfysik gäller det att hitta den rätta $\mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ där $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Sedan minimera $S = \int \mathcal{L} \, d\vec{r}$ med avseende på Ψ och $\partial_\mu \Psi$. Detta ger oss rörelseekvationer som beskriver systemet.

Lagrangian fältteori

1. Sök "the Lagrangian" $\mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi)$

2. "The Action" ges av $S = \int \mathcal{L} \, d\vec{r}$

3. Lagen om "least action" $\delta S = 0$ dvs

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \delta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial_\mu \delta \Psi \, d\vec{r} = 0$$

4. ger rörelselagen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \mathcal{L})} = 0$

5. En transformation $\underline{U}$ ger $\Psi' = \underline{U} \Psi$

6. Invarians under $\underline{U}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(\Psi') = \mathcal{L}(\Psi)$

Exempel

"The Lagrangian" för en elektron kan skrivas

$$\mathcal{L} = i\,\bar{\Psi}\,\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\,\Psi - m\,\bar{\Psi}\,\Psi$$

Genom att minimera

$$S = \int \mathcal{L}\, d\vec{r}$$

kan man få

Dirac ekvationen

Exempel

"The Lagrangian" för elektromagnetiska fält är tex

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^{\mu} A_{\mu}$$

Genom att minimera

$$S = \int \mathcal{L} \, d\vec{r}$$

får man Maxwells ekvationer vilka kan skrivas

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

där

$$\begin{cases} \bar{B}: & \text{Det magnetiska fältet} \\ \bar{E}: & \text{Det elektriska fältet} \\ A_{\mu} = (\phi, \bar{A}): & \text{4-vektor potentialen} \end{cases}$$