

PARTIKEL FYSIK

(v. Hedberg)

Inledning

- Ordförråd
- Relativitetsteori
- Kvantmekanik
- Enheter
- Feynman diagram
- Lagrange formulism
- Grupp teori

Hjälpmaterial

- Symmetrier
- Hadroner
- Leptoner
- Fältteorier
- !
- !
- Experimentella metoder

● Ordförråd

Elementärpartiklar → se boken 1.1 2.1 2.2

Kratter → se boken 1.1

Acceleratorer → se boken 3.1

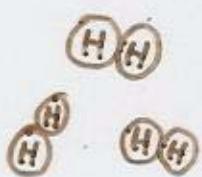
Nya begrepp

Kvarkar	"Center of mass system"
Gluoner	"Center of mass energy"
Leptoner	"Momentum"
Partoner	Klein-Gordon ekvationen
Gauge bosoner	Dirac ekvationen
Svaga bosoner	Spinor
Graviton	Lagrangefunktionen
Hadroner	"The principle of least action"
Baryoner	Feynman diagram
Mesoner	Virtuella fotoner
Kvantfältteori	Symmetrier
QED	Gruppteori
QCD	U(1)
Electroweak teory	SU(2)
Fixed target	SU(3)
CERN	Pauli matriser
DESY	Gell-Mann matriser
Fermilab	Colour
SLAC	Flavour
LBP	
HERA	
SSC	
LHC	
Lorentztransformation	
4-vektorer	
Mandelstam variabler	

Vad består materialet av och hur hålls den samman?

Ex Vätgas

Molekyler:



Observerbara krafter

{ Gravitationen påverkar all typ av materia men är mycket svag och det krävs stor mängder av materia för att den ska kunna observeras.

Den elektromagnetiska kraften håller samman molekylerna.

Ex Väteatomen

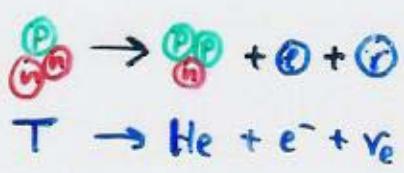
Atomer:



{ Det är den elektromagnetiska kraften som håller samman atomerna och som orsakar olika atomfysikaliska fenomen.

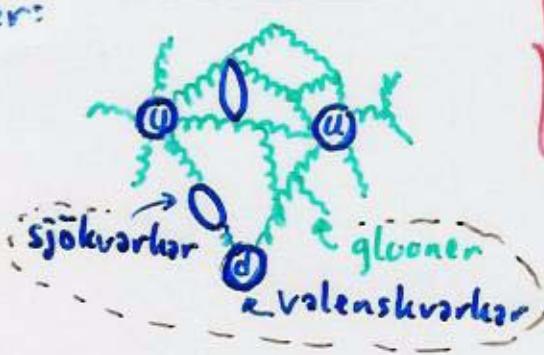
Ex β-sönderfall

Atomkärnor:



{ β-sönderfallet orsakas av den svaga kraften.
Nukleonerna i en atomkärna hålls samman av den starka kraften, trots att protonerna repellerar varandra p.g.a. den elektromagnetiska kraften.

Ex protonen



{ Protonen består av kvarkar och gluoner. Dessa kan växelverka med hjälp av den starka, svaga och elektromagnetiska kraften.

Partoner (gemensamt namn för nukleonens beständsdelar)

Ex elektronen och elektronneutrionen

Leptoner:



{ Elektronerna kan växelverka med hjälp av den svaga och elektromagnetiska kraften.



{ Neutrinerna kan bara växelverka svagt.

Elementarpartiklar

Fermioner (spin = $\frac{1}{2}$)

Leptoner

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\nu}_e \\ e^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_\mu \\ \mu^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_\tau \\ \tau^+ \end{pmatrix}$$

Kvarkar

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$$

Bosoner (spin = 1, 2)

"Gauge" bosoner

Fotonen: γ

Gluoner: $g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$

Svaga bosoner: w^+, w^-, z^0

(Gravitonen: G)

(Higgs boson: H^0)

Hadroner

Baryoner

$tex p: uud$

$n: udd$

$\Lambda: uds$

$\Delta^+: ddd$

⋮

Antibaryoner

$tex \bar{p}: \bar{u}\bar{u}\bar{d}$

$\bar{n}: \bar{u}\bar{d}\bar{d}$

$\bar{\Lambda}: \bar{u}\bar{d}\bar{s}$

$\bar{\Delta}^+: \bar{d}\bar{d}\bar{d}$

⋮

Mesoner

$tex \pi^+: u\bar{d}$

$\pi^-: \bar{u}d$

$K^+: u\bar{s}$

$\rho^+: d\bar{u}$

$K^0: d\bar{s}$

$\bar{K}^0: \bar{d}s$

⋮

Fermioner (spin = $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$)

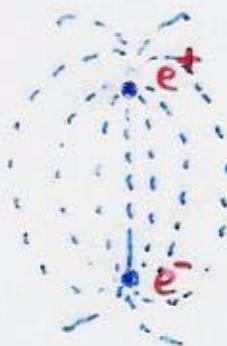
Bosoner
(spin = 0, 1)

Fält teori

Klassisk fältteori

Växelverkan mellan två partiklar beskrivs av en potential.

Denna fältteori fungerar bra i beskrivningar av växelverkan som sker på långa distanser tex gravitation och elektromagnetism.



$$V(r) = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Kvantfältteori

Växelverkan mellan två partiklar sker genom utbyte av andra partiklar s.k. "gauge" bosoner

Denna fältteori kan också beskriva växelverkan som sker på korta distanser i den subatomära världen dvs svag och stark växelverkan



Exempel på kvantfältteorier:

1. QED "Quantum Electro Dynamics" (gauge bosoner = γ)

Denna teori beskriver den elektromagnetiska kraften

2. QCD "Quantum Chromodynamics" (gauge bosoner = $g, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$)

Denna teori beskriver den starka kraften

3. "Electroweak theory" (gauge bosoner = γ, Z^0, W^+, W^-)

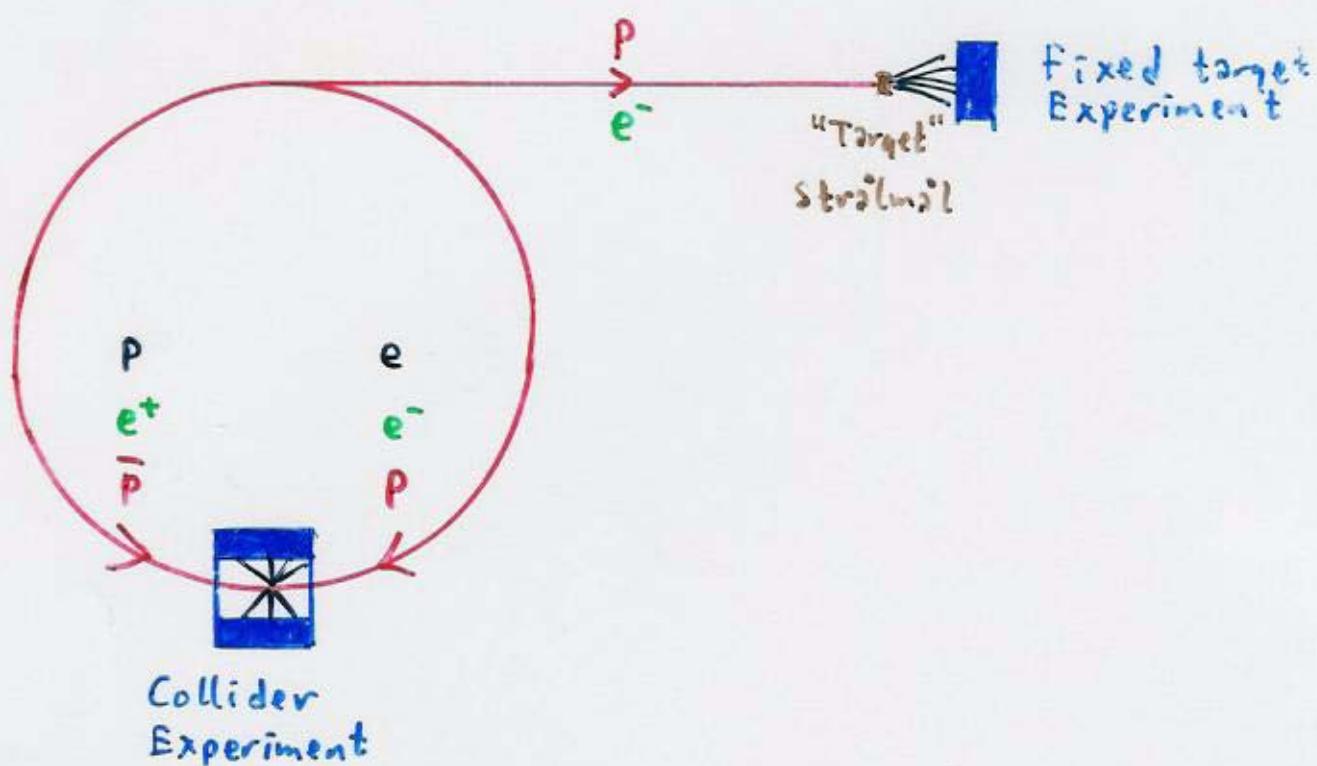
Denna teori beskriver både den svaga och den elektromagnetiska kraften.

("General Relativity") är en klassisk fältteori som beskriver gravitationen. En kvantfältteori för gravitationen finns ej.

Experimentell Partikel fysik

Acceleratorer: Synkrotroner — cirkulära acceleratorer
Linacs — linjära acceleratorer

Experiment: "Fixed target" — En partikelstråle skjuts på ett strömlinje
"Collider" — Två partikelstrålar skjuts mot varandra



Partikel fysik laboratorier

Laboratorium Accelerator Experimenttyp Partiklar Partiklenergi (GeV)

CERN (Europa)	PS	fixed target	p	28
	SPS	fixed target	p	450
	(S \bar{p} pS)	collider	p, \bar{p}	450, 450
	LEP	collider	e $^+$, e $^-$	50, 50
	(LEP II)	collider	e $^+$, e $^-$	100, 100
	LHC	collider	{ p, p (e, p)	8000, 8000 50, 8000

DESY (Tyskland)	HERA	collider	e $^-, p$	26, 820
--------------------	------	----------	-----------	---------

Fermilab (USA)	Tevatron	{ fixed target collider	p p, \bar{p}	1000 1000, 1000
-------------------	----------	----------------------------	-------------------	--------------------

Stanford (USA)	SLAC	fixed target	e $^-$	25
	PEP	collider	e $^+, e^-$	15, 15
	SLC	collider	e $^+, e^-$	50, 50

Brookhaven (USA)	AGS	fixed target	p	32
---------------------	-----	--------------	---	----

KEK (Japan)	KEK	fixed target	p	12
	Tristan	collider	e $^+, e^-$	32, 32

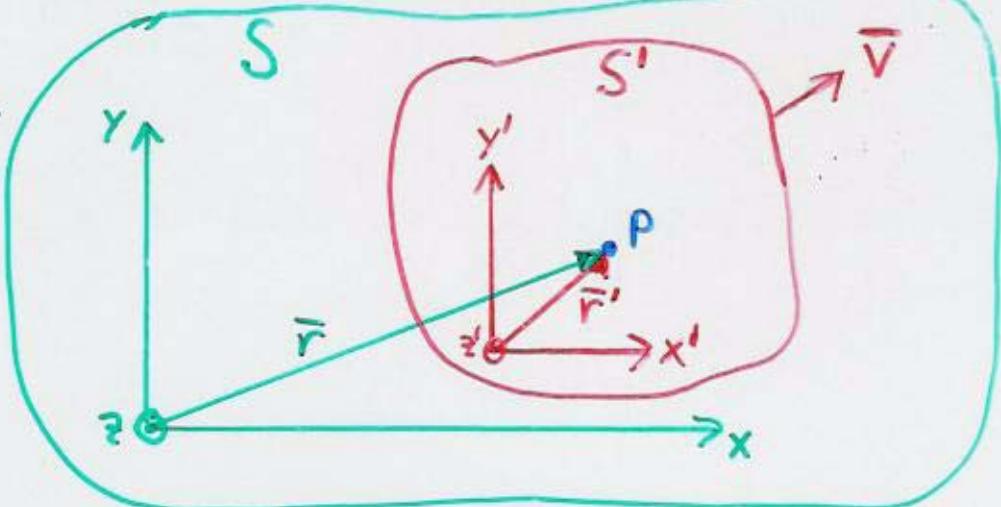
Serpukhov (Ryssland)	- (UNK)	fixed target collider	p p, \bar{p}	76 3000, 3000
-------------------------	------------	--------------------------	-------------------	------------------

SSC	SSC	collider	p, p	20000, 20000
! Pris ca 50-70 miljarder kroner !				

- Relativitets-teori → se stencil
- Lorentz transformation → se boken A.1
- $E^2 = p^2 + m^2$ → se boken A.2
- Enhetsbytte → se boken 1.5
- Relativitetsteori (fortsättning)
 - 4-vektorer → se boken A.1
 - Center-of-mass system → se boken A.2

Relativitets teori

Anta två referensramar S och S' som rör sig med hastigheten \bar{v} relativt varandra:



rör klassisk Galileisk transformation gäller att

$$\begin{cases} \bar{r}' = \bar{r} - \bar{v} \cdot t \\ t' = t \end{cases}$$

vissa av fysikens lagar (tex Schrödinger ekvationen) är invarianta (ändras inte) om man gör denna transformation. Andra (tex Maxwell's ekvationer) är inte invarianta under Galileisk transformation.

i relativitetsteori antar man två axiom:

1. Alla naturlagar är lika i alla referensramar.
2. Ljushastigheten är lika i alla referensramar.

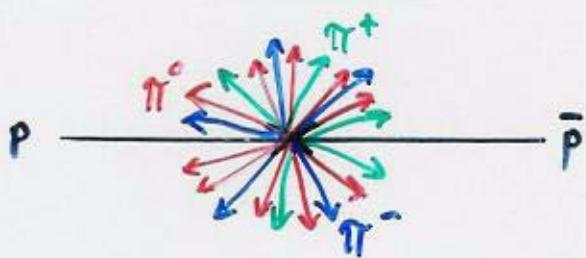
Detta ger upphov till Lorentz transformationen

$$\begin{cases} r_{||}' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} (r_{||} - v \cdot t) = \gamma (r_{||} - v \cdot t) \\ r_{\perp}' = r_{\perp} \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} (t - \frac{v}{c} r_{||}) = \gamma (t - \frac{v}{c} r_{||}) \end{cases}$$

där $r_{||}$ är komponenten av \bar{r} i \bar{v} 's riktning och

r_{\perp} är komponenten av \bar{r} vinkelrätt mot \bar{v} 's riktning

Exempel

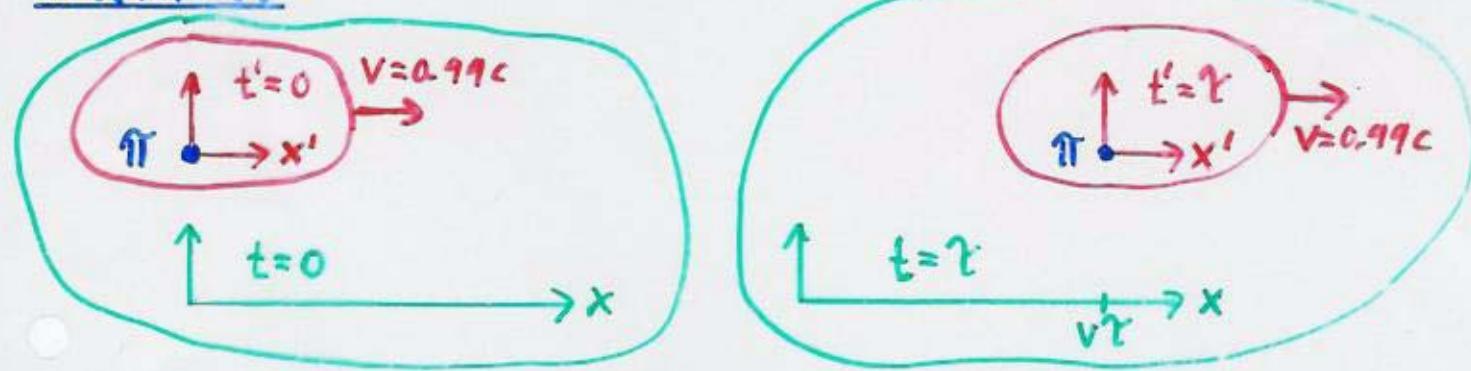


I en högenergetisk kollision mellan en proton och en antiproton bildas typiskt 1 ost π^0 , 5 ost π^+ och 5 ost π^-

Den genomsnittliga livslängden för en π^0 är $\gamma = 8 \cdot 10^{-17}$ s, och för en π^+/π^- är den $\gamma = 3 \cdot 10^{-8}$ s

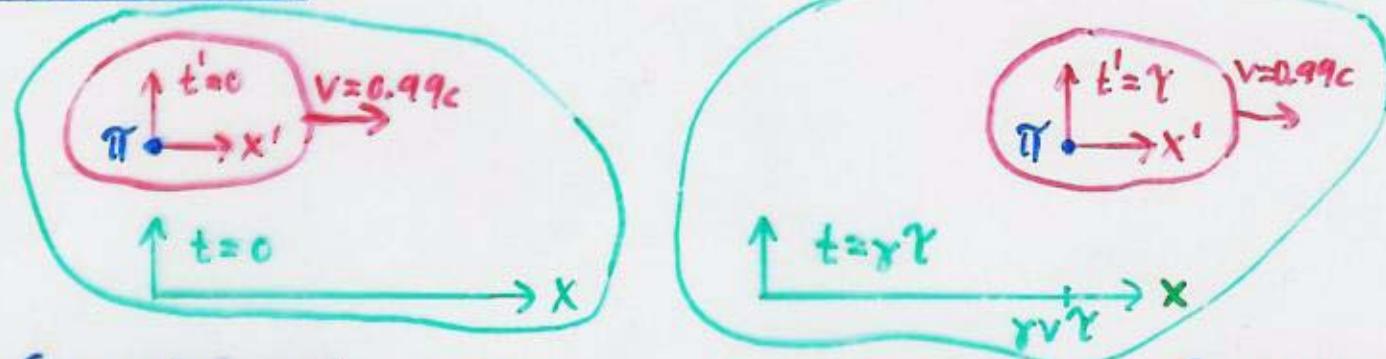
Om pionernas hastighet $\beta = \frac{v}{c}$ är 0.99 hur långt färdas de i detektorn innan de sönderfaller?

Klassiskt:



$$\begin{cases} x = v \cdot t + x' = 0.99 \cdot c \cdot \gamma + 0 \\ t = t' = \gamma \end{cases} = 0.02 \mu\text{m} = 9 \text{ fm}$$

Relativistiskt:



$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') = \gamma v \gamma \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c}x') = \gamma \tau \end{cases} \text{ efteran } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 0.14 \mu\text{m} & \pi^0 \\ x = 63 \text{ m} & \pi^{\pm} \end{cases}$$

Ljus hastigheten är $= c$ i alla referensramar ger alltså:

$$\left. \begin{aligned} x &= \gamma x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' \\ t &= \gamma t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' \end{aligned} \right\} \text{"Lorentz contraction"}$$

Konservering av massa och rörelsemängd är två lagar som är Lorentz invarianta \Rightarrow

$M = \gamma m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m$

Vilomassan
Relativistisk massa

Vilomassan m
för en partikel
är den samma
i alla referens-
ramar. Dvs den
är Lorentz invariant.

P
 $m = 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$V = 0.99c$

$M = \gamma m = 14 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

CM
 P
 $m = 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

LAP

Lorentz invarianta kvantiteter:

C: Ljus hastigheten

m: Vilomassan

Icke-Lorentz invarianta kvantiteter

t: tid

x: längd

M: massa

E: Energi

p: Rörelsemängd

A) Energi

$$E = Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots$$

↑ ↗
energi från värmeossen kinetisk energi

B) Rörelsemängd (eng. "momentum")

$$\bar{p} = M\bar{v}$$

c) Relationen mellan E, p, m :

$$Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow (mc^2)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (mc^2)^2$$

$$\text{Sätt in } v = \frac{p}{M} \Rightarrow M^2 c^4 \left(1 - \frac{p^2}{M^2 c^2}\right) = m^2 c^4$$

$$\text{Sätt in } E = Mc^2 \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad \text{dvs}$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Dvs för masslösa partiklar som photonen gäller:

$$E_T = p_T c$$

Enhetsbytte

- Vi bestämmer oss för att mäta energi i elektronvolt
 $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

- Vi inför följande:

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

$$1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$$

- Vi ändrar alla andra enheter så att $c=1$ och $\hbar=1$ i våra formler.

Exempel: $E=mc^2$ blir $E=M$ om $\begin{cases} E \text{ mäts i GeV} \\ M \text{ mäts i GeV/c}^2 \end{cases}$

- På detta sätt får vi följande enheter:

$$E - \text{Energi} \quad - 1 \text{ GeV} = 1.602 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$m - \text{Massa} \quad - 1 \text{ GeV/c}^2 = 1.783 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$p - \text{Rörelsemängd} - 1 \text{ GeV/c} = 5.344 \cdot 10^{-19} \text{ kg-m/s}$$

$$L - \text{Längd} \quad - 1 \text{ hc/GeV} = 1.973 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

$$t - \text{Tid} \quad - 1 \text{ h/GeV} = 6.582 \cdot 10^{-25} \text{ s}$$

$$\beta - \text{Hastighet} \quad - 1 \text{ c} = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- Exempel på vektorer:

Leptoner	$\gamma: m \approx 0$ $e: m = 0.510 \text{ MeV/c}^2$ $\mu: m = 106 \text{ MeV/c}^2$ $\tau: m = 1784 \text{ MeV/c}^2$	$d: m \approx 350 \text{ MeV/c}^2$ $u: m \approx 350 \text{ MeV/c}^2$ $s: m \approx 500 \text{ MeV/c}^2$ $c: m \approx 1500 \text{ MeV/c}^2$ $b: m \approx 4500 \text{ MeV/c}^2$
----------	---	--

Gauge bosoner	$g, \gamma: m = 0$ $w: m = 80600 \text{ MeV/c}^2$ $z: m = 91000 \text{ MeV/c}^2$	$t: m \approx 200000 \text{ MeV/c}^2 ?$ $p_b: m \approx 194000 \text{ MeV/c}^2$
---------------	--	--

Beteckningar

\vec{a} : 4-vektor

\bar{a} : 3-vektor

a : matris

\hat{a} : operator

Ψ : vägfunktion

Ψ : fler-dimensionell
vägfunktion

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{tex } \vec{a} = (t, \bar{a})$$

$$\text{tex } \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tex } \hat{L}_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{tex } \Psi_{Te} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

Relativistisk kinematik

4-vektorer

↖ 4-vektor ↘ 3-vektor

"Space-time four vector": $\vec{r} = (t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$

"Energy-momentum four vector": $\vec{p} = (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z)$

Skalärprodukten av två 4-vektorer är Lorentz-invarians:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_0, \vec{A}) \cdot (B_0, \vec{B}) = A_0 \cdot B_0 - \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{B}}_{\text{"vanlig" skalärprodukt}}$$

Addition och subtraktion av 4-vektorer:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_0, \vec{A}) + (B_0, \vec{B}) = (A_0 + B_0, \vec{A} + \vec{B}) = (A_0 + B_0, A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_0, \vec{A}) - (B_0, \vec{B}) = (A_0 - B_0, \vec{A} - \vec{B}) = (A_0 - B_0, A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

Massa

Den Lorentzinvarianta massan av en partikel ges av

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = (E, \vec{p}) \cdot (E, \vec{p}) = \underline{E^2 - \vec{p}^2 = m^2}$$

Massan i kvadrat av två partiklar ges av

$$S = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

Massan i kvadrat av n partiklar ges av

$$W^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)^2 = (E_1 + E_2 + \dots + E_n)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)^2$$

Energi → Hastighet → Rörelsenäring

För en partikel med 4-vektor $\vec{p} = (E, \vec{p})$ och massan m gäller:

$$\begin{cases} E = \gamma m \\ \vec{p} = \gamma m \vec{B} \end{cases}$$

där $\begin{cases} \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$

Kollision mellan två partiklar



Mandelstam variabler

Dessa definieras på följande sätt

$$\begin{cases} S = (\vec{P}_a + \vec{P}_b)^2 = (\vec{P}_c + \vec{P}_d)^2 \\ t = (\vec{P}_a - \vec{P}_c)^2 = (\vec{P}_b - \vec{P}_d)^2 \\ u = (\vec{P}_a - \vec{P}_d)^2 = (\vec{P}_b - \vec{P}_c)^2 \end{cases}$$

då gäller att

$$S + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$$

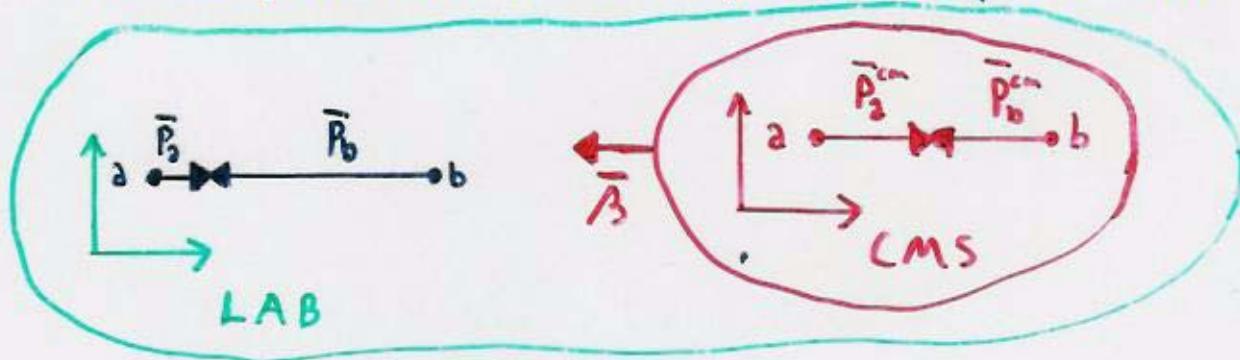
Konservering av energi och rörelsemängd

Vi vet empiriskt att

$$\vec{P}_a + \vec{P}_b = \vec{P}_c + \vec{P}_d \Rightarrow \begin{cases} E_a + E_b = E_c + E_d \\ \vec{P}_a + \vec{P}_b = \vec{P}_c + \vec{P}_d \end{cases}$$

"Center of mass system" CMS

CMS av partiklarna a och b, är det system där $\vec{P}_a = -\vec{P}_b$:



$$\bar{\beta} = \frac{\vec{P}_a + \vec{P}_b}{E_a + E_b}$$

Lorentztransformation från LAB till CMS:

$$\begin{cases} P_{||}^{cm} = \gamma (P_{||}^{lab} - \beta E^{lab}) \\ P_{\perp}^{cm} = P_{\perp}^{lab} \\ E^{cm} = \gamma (E^{lab} - \beta P_{||}^{lab}) \end{cases}$$

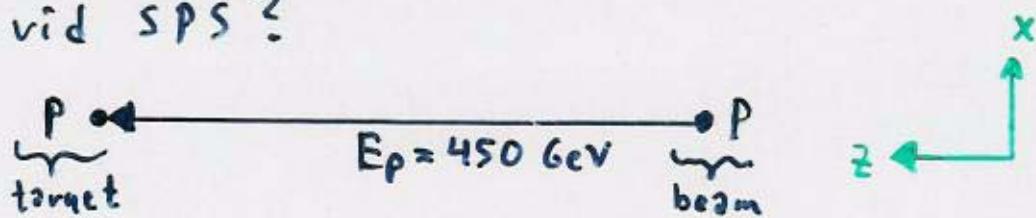
"Center of mass energy" \sqrt{s}

\sqrt{s} kallas för "center of mass energy" eller "invariant mass" av de kolliderande partiklarna.

$$\sqrt{s} = \sqrt{(\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2}$$

Detta är energin som är tillgänglig för att skapa nya partiklar.

\sqrt{s} vid SPS?



$P_T, P_B :$

$$P_T = \sqrt{E_T^2 - m_p^2} = 0 \Rightarrow E_T = m_p$$

$$P_B = \sqrt{E_p^2 - m_p^2} \approx E_p$$

$\vec{P}_T, \vec{P}_B :$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_T &= (m_p, 0, 0, 0) \\ \vec{P}_B &= (E_p, 0, 0, E_p) \end{aligned} \right\} \quad \vec{P}_T + \vec{P}_B = (0, 0, E_p)$$

$S :$

$$S = (\vec{P}_T + \vec{P}_B)^2 = (m_p + E_p)^2 - (\vec{P}_T + \vec{P}_B)^2 = (m_p^2 + E_p^2 + 2m_p E_p) - E_p^2$$

$$S \approx 2m_p E_p$$

$$\sqrt{S} \approx \sqrt{2m_p E_p} = 29 \text{ GeV}$$

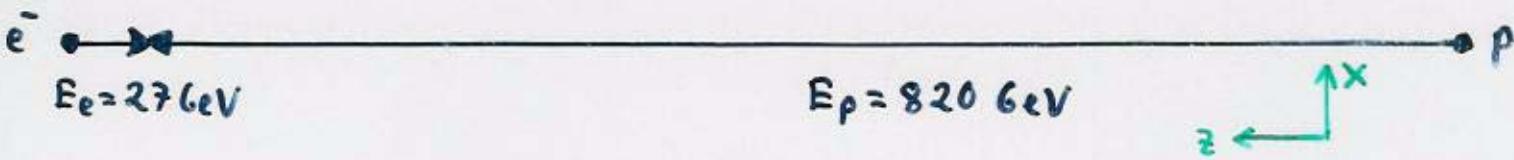
"Fixed target" : $\sqrt{S} = \sqrt{2m_p \cdot E_b}$

Kolliderare : $\sqrt{S} = \sqrt{4E_a \cdot E_b} = 2E$

↑
om $E_a = E_b$

Exempel

\sqrt{s} vid Hera?



$$p_e, p_p:$$

$$E_e^2 = m_e^2 + p_e^2 \Rightarrow p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2} = \sqrt{27^2 - 0.0005^2} \approx E_e$$

$$E_p^2 = m_p^2 + p_p^2 \Rightarrow p_p = \sqrt{E_p^2 - m_p^2} = \sqrt{820^2 - 0.938^2} \approx E_p$$

$$\vec{p}_e, \vec{p}_p:$$

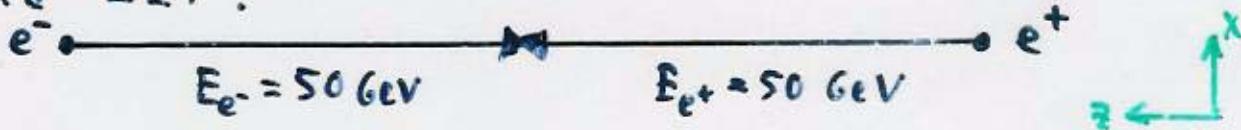
$$\begin{aligned} \vec{p}_e &= (E_e, 0, 0, -E_e) \\ \vec{p}_p &= (E_p, 0, 0, E_p) \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \vec{p}_e + \vec{p}_p = (0, 0, E_p - E_e)$$

$$S:$$

$$S = (\vec{p}_e + \vec{p}_p)^2 = (E_e + E_p)^2 - (\vec{p}_e + \vec{p}_p)^2 = [E_e^2 + E_p^2 + 2E_e E_p] - [E_e^2 + E_p^2 - 2E_e E_p]$$

$$\sqrt{S} = \sqrt{4E_e E_p} \approx 300 \text{ GeV}$$

\sqrt{s} vid LEP?



$$p_e, p_{e^+}: \quad p_{e^-} = p_{e^+} \approx E_{e^-} \approx E_{e^+} = E_e$$

$$\vec{p}_{e^-}, \vec{p}_{e^+}:$$

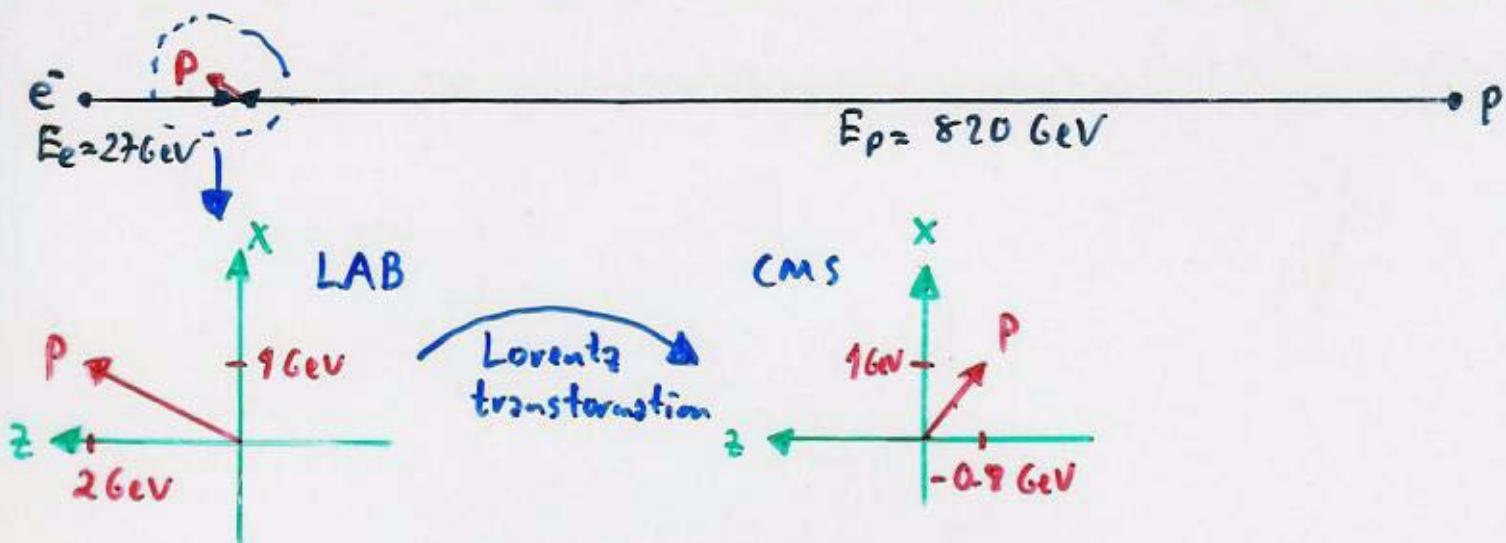
$$\begin{aligned} \vec{p}_{e^+} &= (E_e, 0, 0, E_e) \\ \vec{p}_{e^-} &= (E_e, 0, 0, -E_e) \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-} = (0, 0, 0)$$

$$S: \quad S = (\vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-})^2 = (E_e + E_e)^2 - 0 = 4E_e^2$$

$$\sqrt{S} = 2E_e = 100 \text{ GeV}$$

Exempel

Lorentztransformation från lab till cms vid Hera!



$$\bar{\beta} = \frac{\bar{p}_e + \bar{p}_p}{\bar{E}_e + \bar{E}_p} = \frac{(0, 0, -E_e)}{E_e + E_p} + \frac{(0, 0, E_p)}{E_e + E_p} = \frac{(0, 0, E_p - E_e)}{E_e + E_p}$$

$$\beta = \frac{E_p - E_e}{E_p + E_e} = 0.936$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2.85$$

$$\bar{p}^{lab} = (1, 0, 2) \text{ GeV} \Rightarrow p^{lab} = 2.24 \text{ GeV}$$

$$E^{lab} = \sqrt{m_p^2 + p^{lab2}} = 2.42 \text{ GeV}$$

Lorentz transformation

$$\begin{cases} p_x^{cm} = p_x^{lab} = 1 \text{ GeV} \\ p_z^{cm} = \gamma (p_z^{lab} - \beta E^{lab}) = -0.8 \text{ GeV} \\ E^{cm} = \gamma (E^{lab} - \beta p_z^{lab}) = 1.6 \text{ GeV} \end{cases}$$

$$\vec{p}_p = (1.6, 1, 0, -0.8) \text{ GeV i CMS}$$

$$\vec{p}_p = (2.4, 1, 0, 2) \text{ GeV i LAB}$$