

## Kapitel 14 - Harmonisk oscillator

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

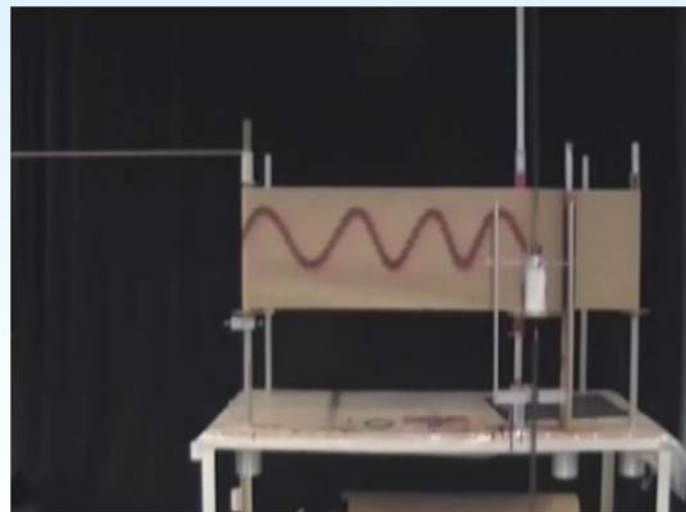
1



## Harmonisk Svängning Experiment



Ett experiment som hjälper oss att hitta en matematisk beskrivning av harmonisk svängning:



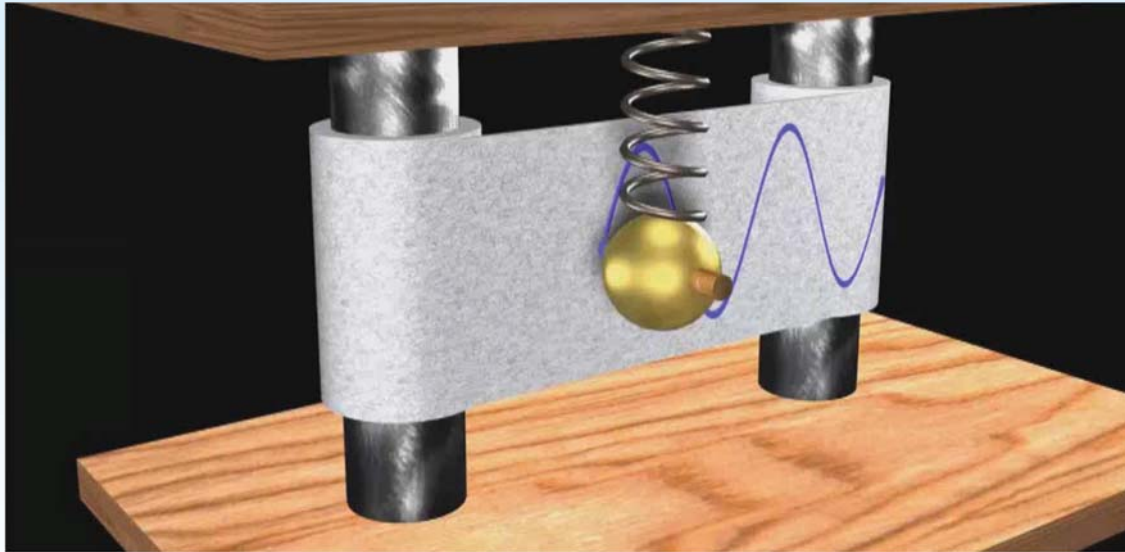
<https://www.youtube.com/watch?v=p9uhmjbZn-c>

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

2



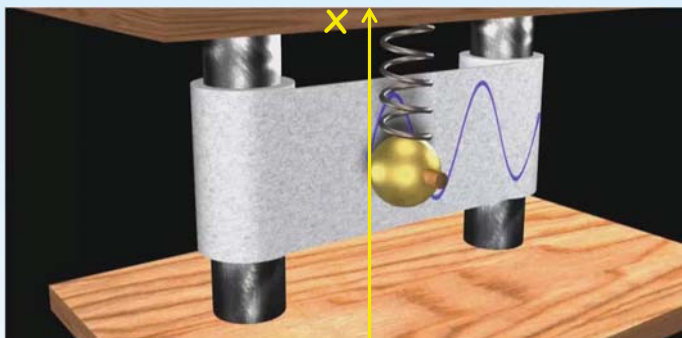
# Harmonisk Svängning Experiment



Slutsats: Harmonisk svängning kan beskrivas av funktionen  
 $x = A \sin(Bt + C)$   
 om  $t$  är tiden och  $A$ ,  $B$  och  $C$  är konstanter som beskriver rörelsen.

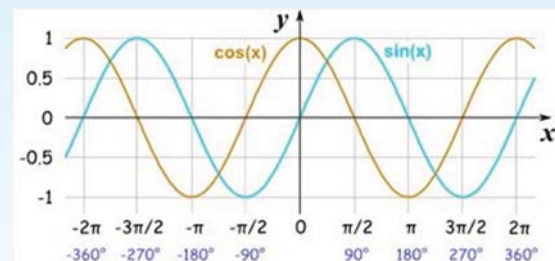


# Harmonisk Svängning Funktionen



$$x = A \sin(Bt + C) \text{ eller}$$

$$x = A \cos(Bt + C - \pi/2)$$



$x$  : Vertikal förflyttning. Enhet: meter

$t$  : Tid. Enhet: sekund

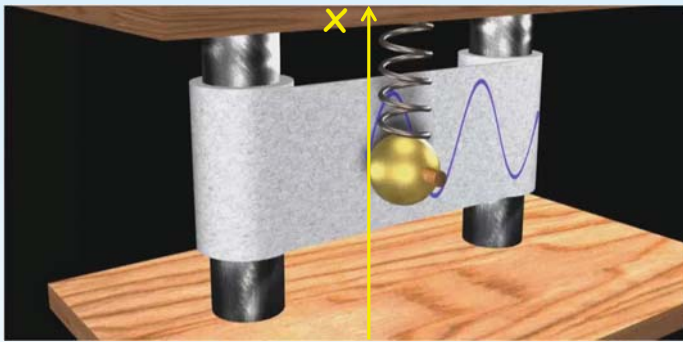
$A$  : Amplitud (maximal förflyttning). Enhet: meter

$B = \omega$  : Vinkel frekvens (antal svängningar per sekund gånger  $2\pi$ ).  
 Enhet: Radianer per sekund

$C = \phi$  : Fas vinkel (bestämmer läget vid tiden = 0). Enhet: radianer



# Harmonisk Svängning f och T



$$X = A \sin(\omega t + \phi')$$

eller

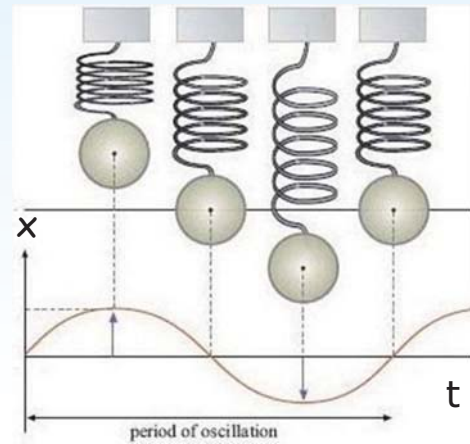
$$X = A \cos(\omega t + \phi)$$

T: Period = tiden det tar för massan att åka upp och ner. **Enhet: sekund**

f: Frekvens = Antalet perioder per sekund.  
**Enhet: 1/sekund = Hz**

$$f = 1 / T \quad \omega = 2\pi f$$

Formelsamling



# Harmonisk Svängning fas vinkel

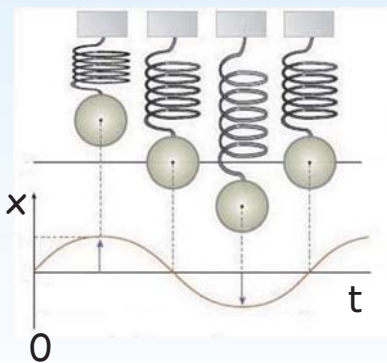
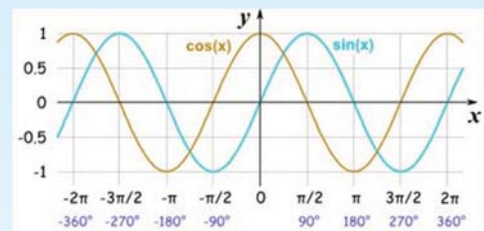


$$x = A \sin(\omega t + \phi')$$

eller

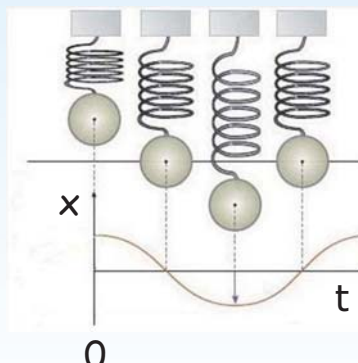
$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Fas vinkeln ( $\phi$ ) bestämmer läget vid tiden = 0.  
För då gäller:  $x = A \sin(\phi')$  eller  $x = A \cos(\phi)$



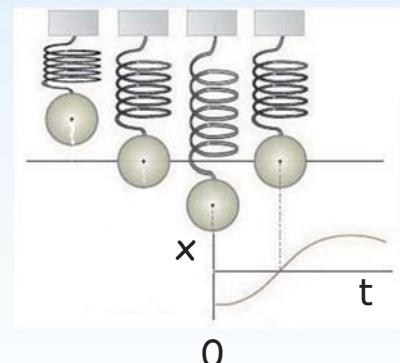
$$X = A \sin(\omega t)$$

$$X = A \cos(\omega t - \pi/2)$$



$$X = A \cos(\omega t)$$

$$X = A \sin(\omega t + \pi/2)$$



$$X = A \cos(\omega t + \pi)$$

$$X = A \sin(\omega t - \pi/2)$$



# Harmonisk Svängning v och a



Vi har nu en matematisk beskrivning av läget  
(den vertikala förflyttningen).

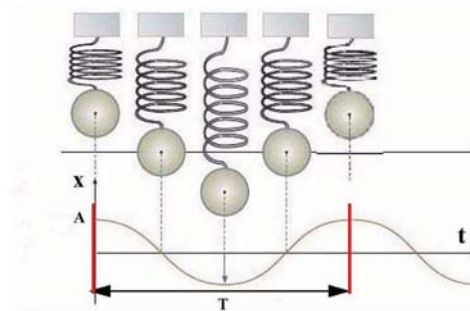
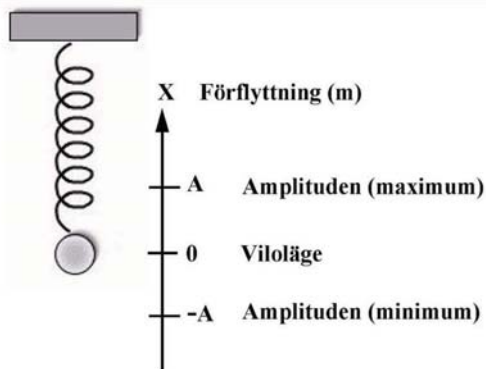
Vad är hastigheten och accelerationen ?

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$



# Harmonisk Svängning Sammanfattning



$$\phi = \arccos(x_0 / A) = \arccos(A/A) = 0$$

|                            |  |
|----------------------------|--|
| <b>x</b>                   | Förflyttning (m)                             |
| <b>A</b>                   | Amplitud (m)                                 |
| <b>t</b>                   | Tid (s)                                      |
| <b>T</b>                   | Period (s)                                   |
| <b>f</b>                   | Frekvens (Hz) = $1 / T$                      |
| <b><math>\omega</math></b> | Vinkelfrekvens (rad/s) = $2\pi / T = 2\pi f$ |
| <b><math>\phi</math></b>   | Fasvinkel (rad) = $\arccos(x_0 / A)$         |

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| $x = A \cos(\omega t + \phi)$                           | $\rightarrow x_{\max} = A$          |
| $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$   | $\rightarrow v_{\max} = \omega A$   |
| $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$ | $\rightarrow a_{\max} = \omega^2 A$ |

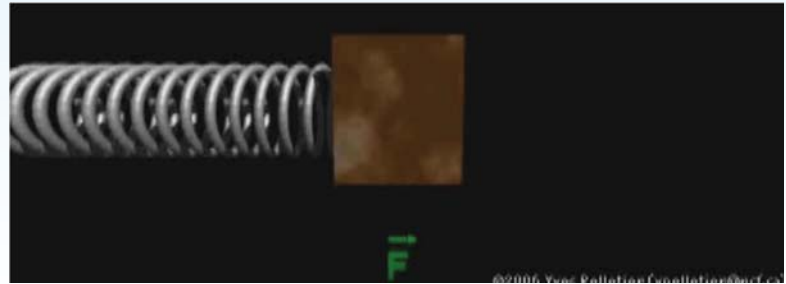




# Harmonisk Svängning Fjädern & Krafter



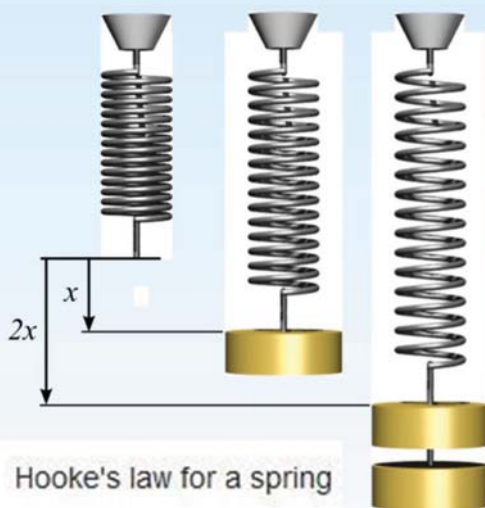
## Fjädrar, Hookes lag & Krafter



<https://www.youtube.com/watch?v=ca770YbeZw>



# Harmonisk Svängning Fjädern

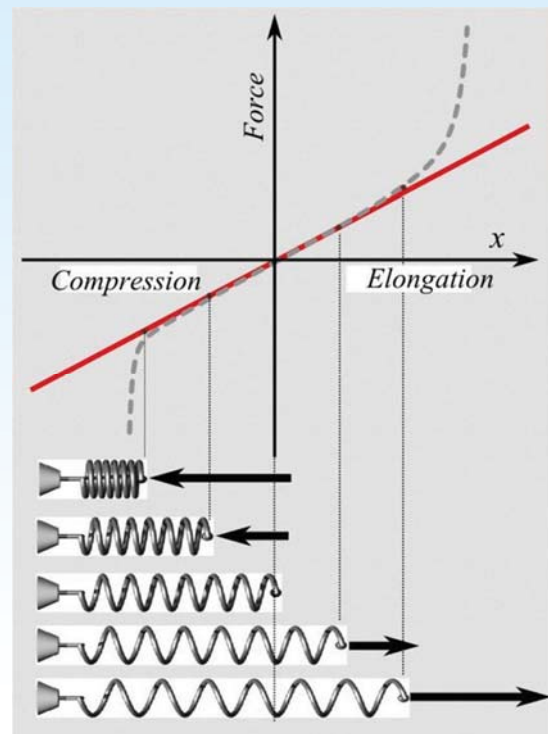


Hooke's law for a spring

$$F = -kX$$

Formelsamling

k = fjäderkonstanten  
beskriver hur styv fjädern är





# Harmonisk Svängning Krafter



**Newton's first law of motion:** A body acted on by no net force moves with constant velocity (which may be zero) and zero acceleration.

**Newton's second law of motion:** If a net external force acts on a body, the body accelerates. The direction of acceleration is the same as the direction of the net force. The mass of the body times the acceleration of the body equals the net force vector.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{Newton's second law of motion})$$



Vincent Hedberg - Lunds Universitet

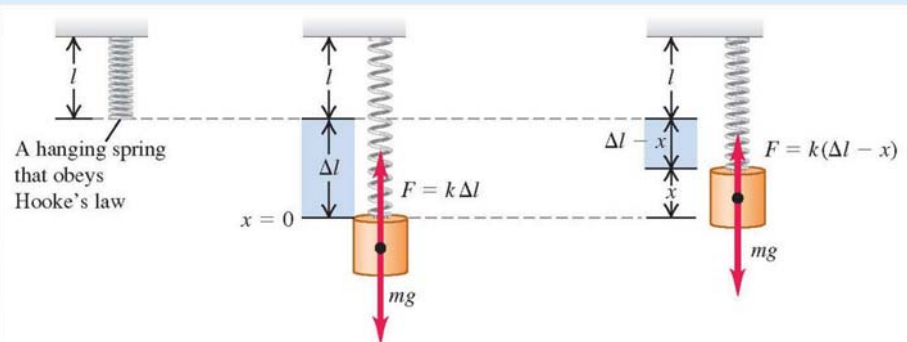
11



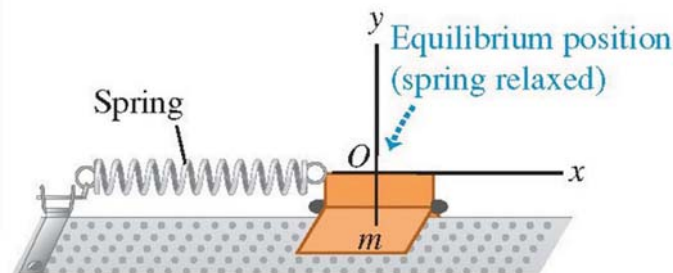
# Harmonisk Svängning: Fjädersn



**Vertikal svängning**  
Gravitationen drar ut fjädern till ett nytt jämviktsläge.



**Horisontell svängning**  
Detta är inte fallet om fjädern är horisontell.



**Svängningarna blir emellertid de samma !**

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

12



# Harmonisk Svängning Krafter



## Horisontell svängning på en luftkudde



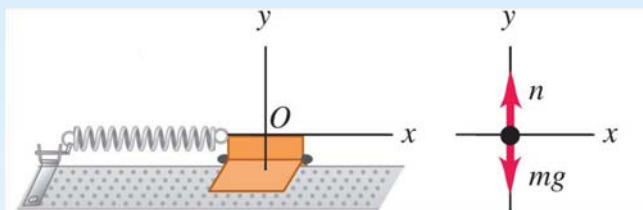
<https://www.youtube.com/watch?v=9nLedU7qvww>



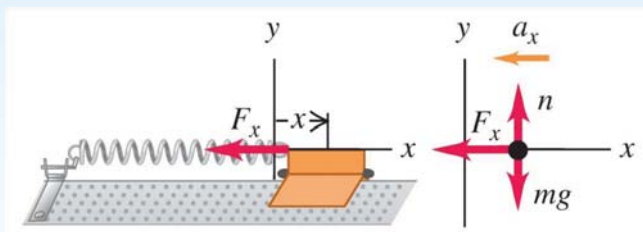
# Harmonisk Svängning Krafter



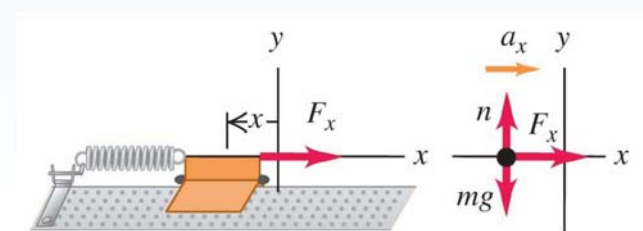
$$x = 0 \quad F_{\text{total}} = 0 \quad a_x = 0$$



$$x > 0 \quad F_{\text{total}} < 0 \quad a_x < 0$$

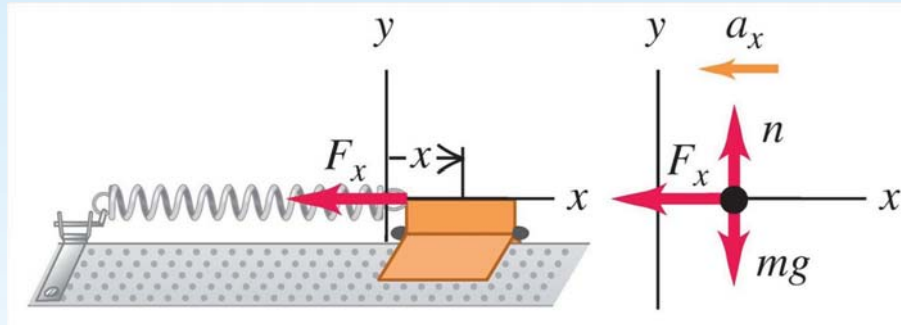


$$x < 0 \quad F_{\text{total}} > 0 \quad a_x > 0$$





# Harmonisk Svängning Krafter



$$F_x = -kx \quad (\text{restoring force exerted by an ideal spring})$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{Newton's second law of motion})$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (\text{simple harmonic motion})$$



# Harmonisk Svängning Krafter



Gamla  
formler:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$a_x = -\omega^2 x$$

Ny formel:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (\text{simple harmonic motion})$$

Kombinera:

$$-\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

Formelsamling

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frekvensen beror  
av två saker:

1. Fjäderkonstanten
2. Massan





# Harmonisk Svängning Krafter



Man kan se på svängningarna på ett annat sätt:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (\text{simple harmonic motion})$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Detta är en differential  
ekvation som har lösningen:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$



# Harmonisk Svängning Krafter



Öka massan



Öka fjäderkonstanten



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frekvensen minskar

Frekvensen ökar

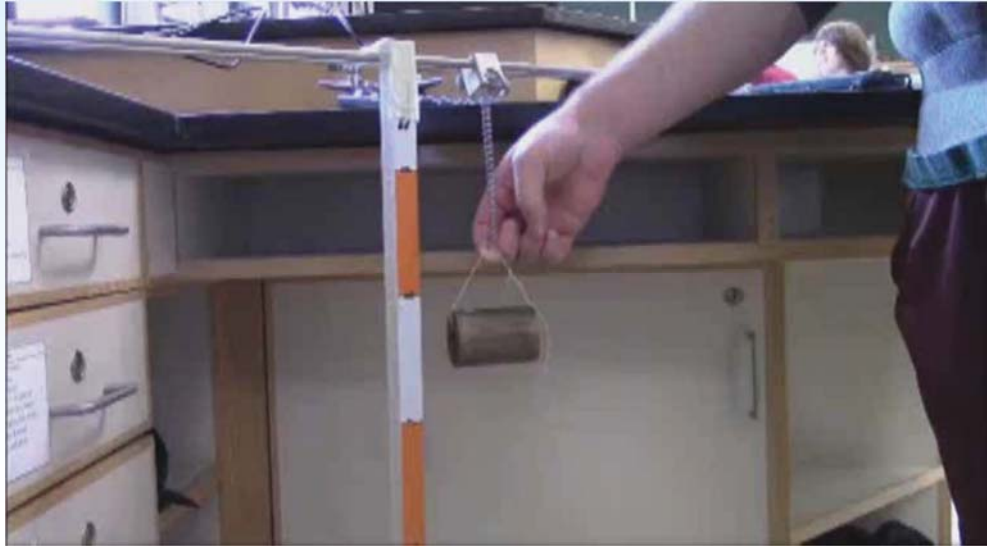


# Harmonisk Svängning

## Vertikal svängning



# Vertikal svängning

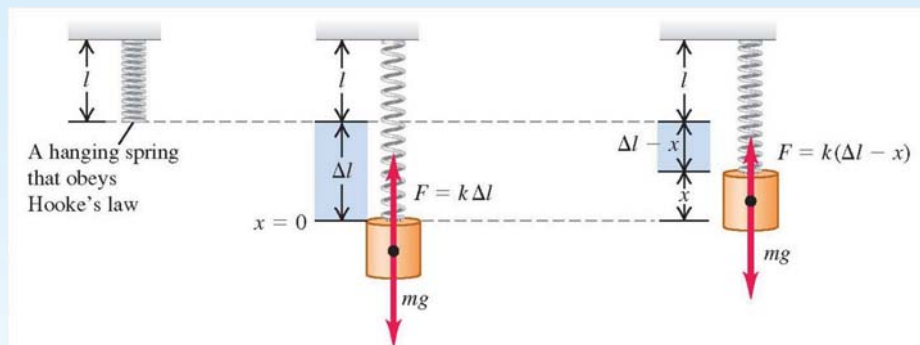


# Harmonisk Svängning

## Vertikal svängning



**Vertikal svängning**  
Gravitationen drar ut fjädern till ett nytt jämviktsläge.



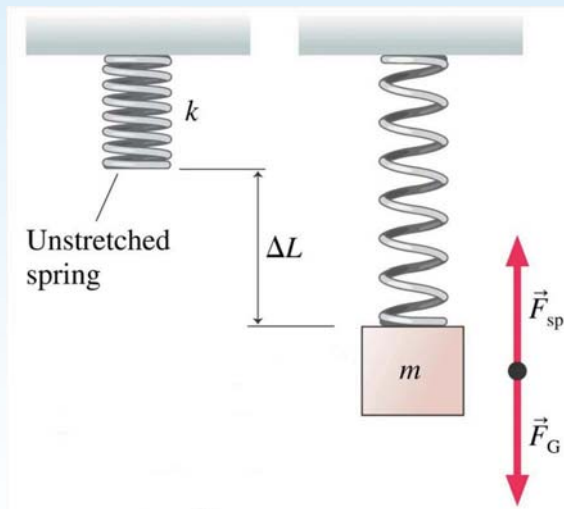


# Harmonisk Svängning

## Vertikal svängning



Utan svängningar: Hur mycket drages fjädern ut ?



$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k\Delta L - mg$$

$$\vec{F}_{total} = m\vec{a} = 0$$

$$\Delta L = \frac{mg}{k}$$



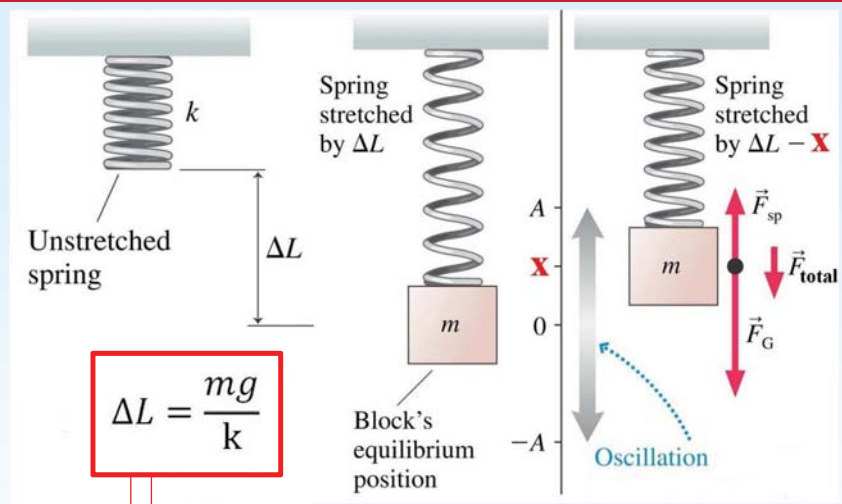
# Harmonisk Svängning

## Vertikal svängning



Med svängningar:

Summera krafterna !



$$\Delta L = \frac{mg}{k}$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k(\Delta L - x) - mg = -kx$$



# Harmonisk Svängning

## Vertikal svängning



Hookes lag:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = -kx$$

Newtons lag:

$$\vec{F}_{total} = m\vec{a} \neq 0$$

$$-kx = m\vec{a} = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Denna differential ekvation har följande lösning:

Formelsamling

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



# Harmonisk Svängning



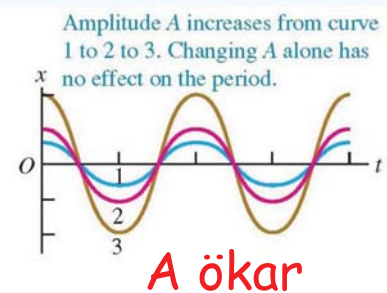
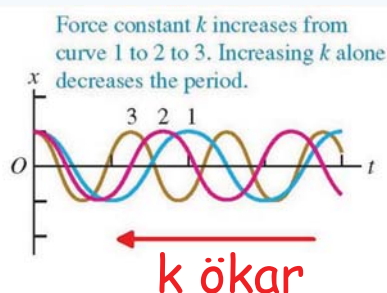
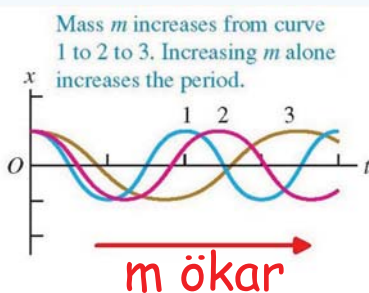
Formelsamling

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{simple harmonic motion})$$

Formelsamling

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{simple harmonic motion})$$

**Observera: f och T beror enbart på k och m.  
Inte på amplituden !**



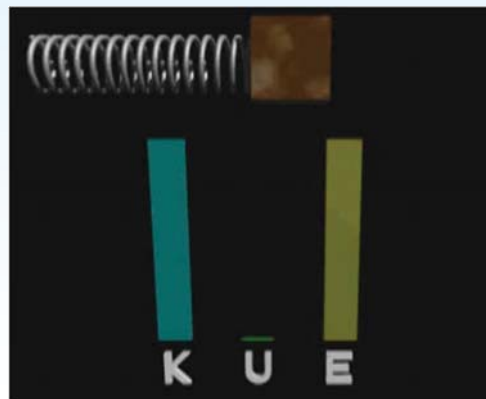




# Harmonisk Svängning Energi



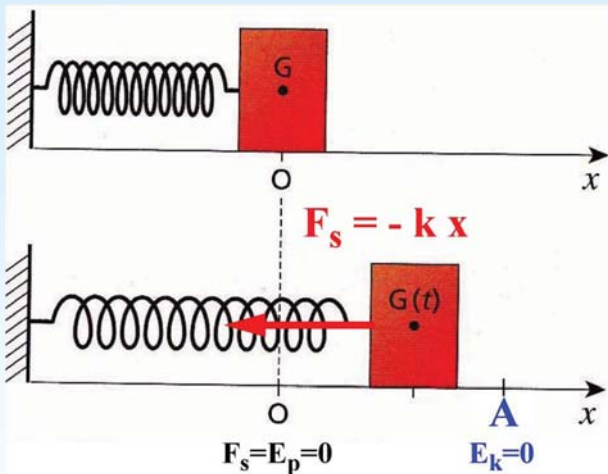
## Energi och harmoniska svängningar



[https://www.youtube.com/watch?v=PL5g\\_IwrC5U](https://www.youtube.com/watch?v=PL5g_IwrC5U)

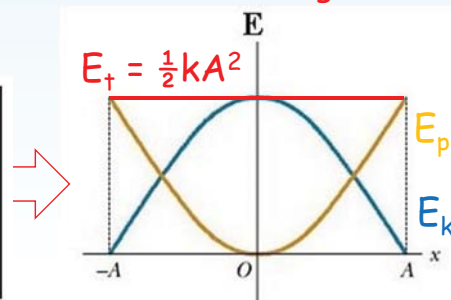


# Harmonisk Svängning Energi



Total mekaniska energin är konstant

Kinetisk energi:  $E_k = \frac{mv^2}{2}$       där  $v = -\omega A \sin(\omega t)$   
 Potentiell energi:  $E_p = \frac{kx^2}{2}$       där  $x = A \cos(\omega t)$   
 Total energi:  $E_t = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}$  (ty  $E_k = 0$  för  $x = A$ )





# Harmonisk Svängning Energi



$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_t = E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} k A^2$$

Formelsamling

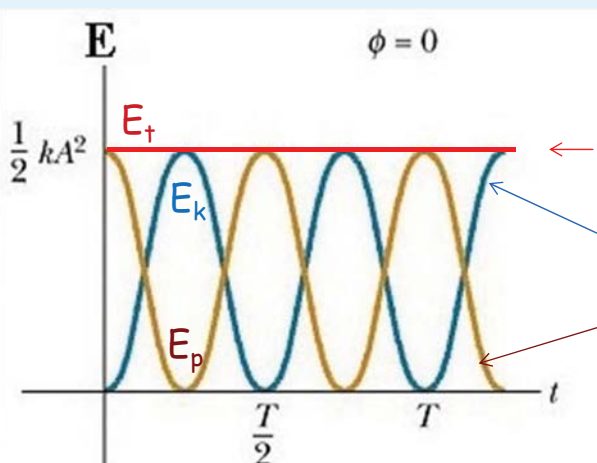
$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konst.}$$



# Harmonisk Svängning Energi



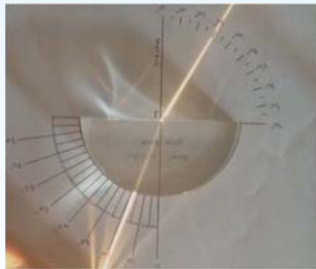
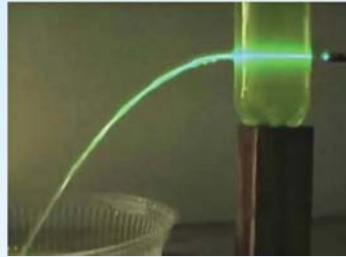
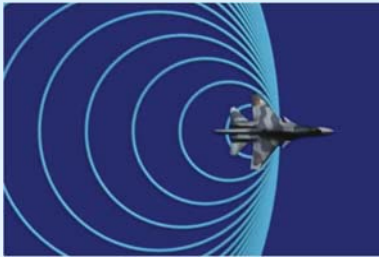
Energins tidsberoende beskrivs av kvadraten av sinus funktioner



$$E_t = E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t)$$



## Kapitel 15 - Mekaniska vågor



## Mekaniska vågor: Transversella vågor



# Transversella vågor





# Mekaniska vågor: Transversella vågor



Transversell våg: Mediumet rör sig i transversell riktning mot vågens färdriktning.

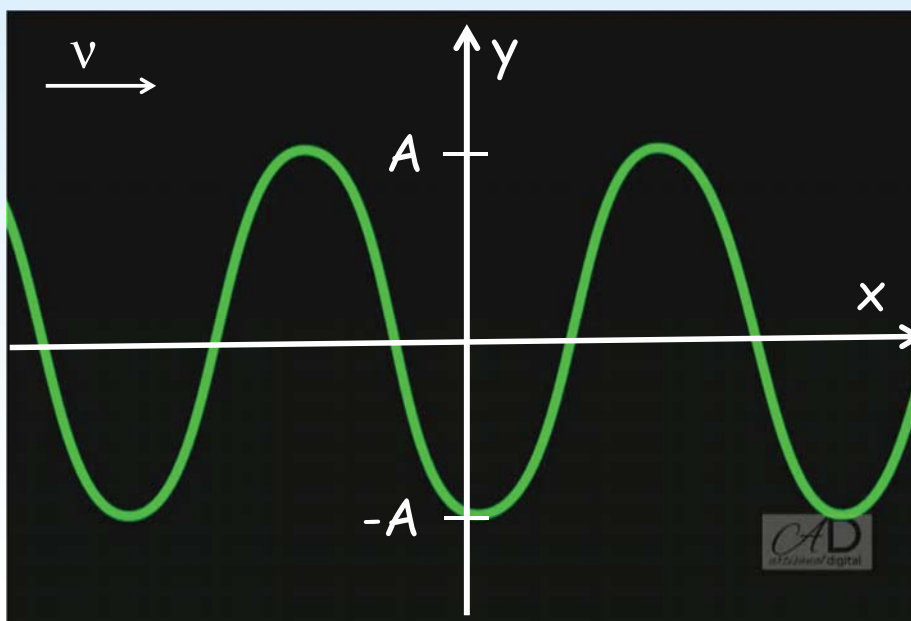
<https://www.youtube.com/watch?v=FUBGrH-PbsU>



# Mekaniska vågor: Transversella vågor



En speciell transversell våg är den sinusformade vågen:



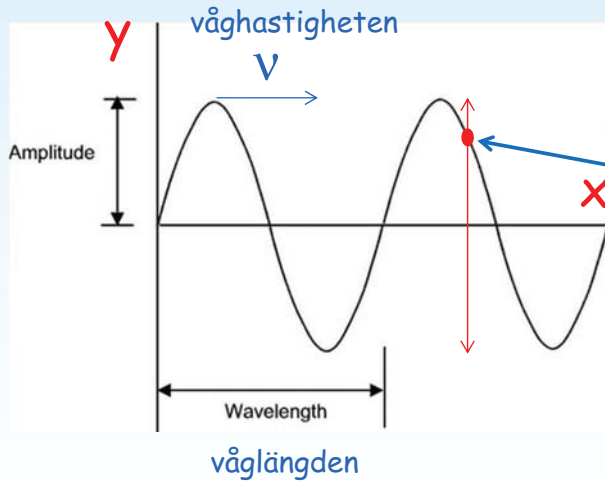




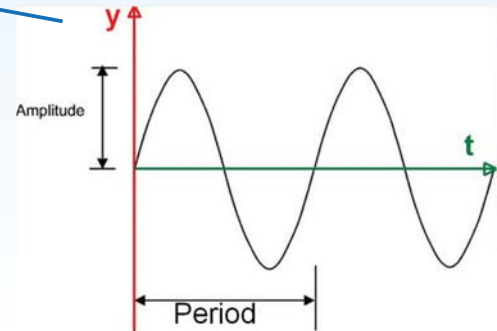
# Mekaniska vågor: Transversella vågor



## Transversella sinus vågor



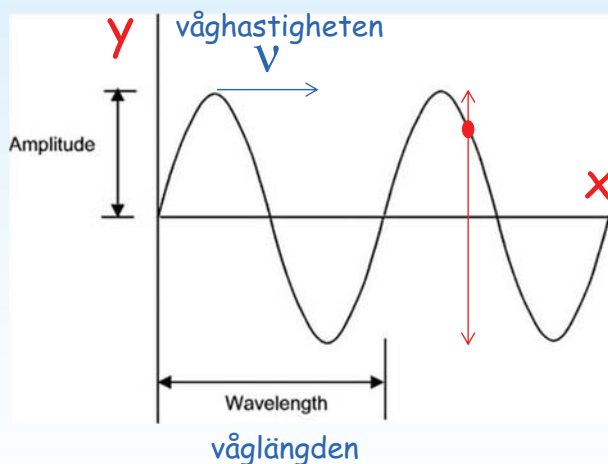
Varje punkt på vågen rör sig upp och ner som en harmonisk svängning med perioden  $T$ .



# Mekaniska vågor: Transversella vågor



## Definitioner:



$A$ : Amplitud (m)

$T$ : Period (s)

$\lambda$ : Våglängd (m)

$v$ : Vågshastighet (m/s) =  $\lambda / T$

$f$ : Frekvens (Hz) =  $1 / T$

$\omega$ : Vinkelfrekvens (radianer /s) =  $2 \pi f$

$k$ : Vågtalet (radianer /m) =  $2 \pi / \lambda$



## Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



# Longitudinella vågor



Vincent Hedberg - Lunds Universitet

35



## Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



Longitudinella vågor:  
Mediumet rör sig i vågens rörelseriktning.



Vincent Hedberg - Lunds Universitet

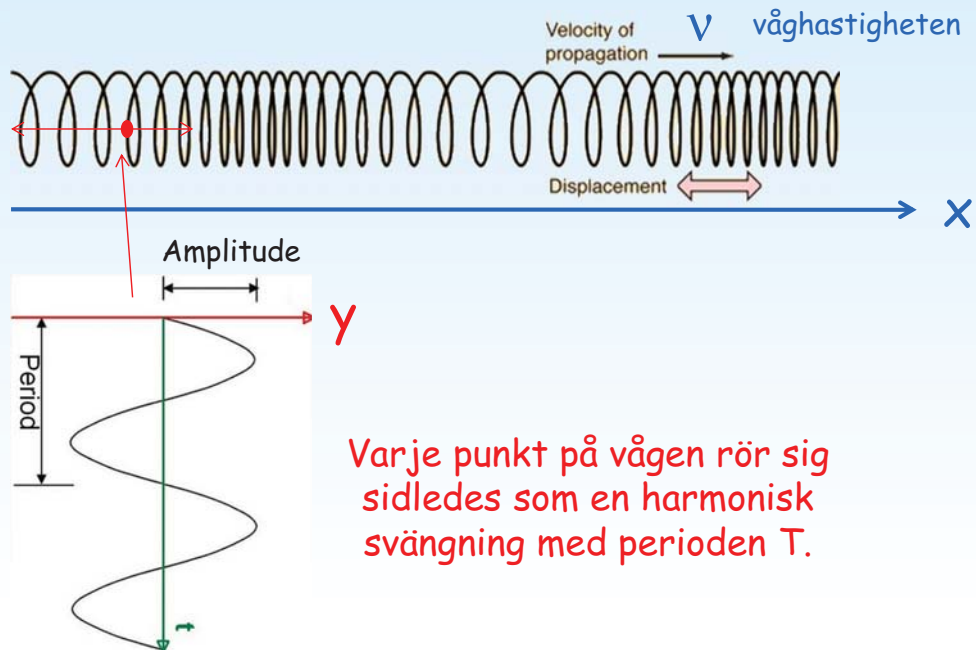
36



# Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



## Longitudinella sinus vågor



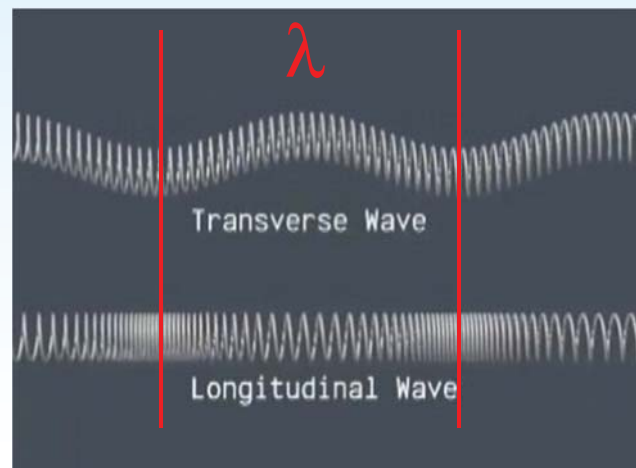
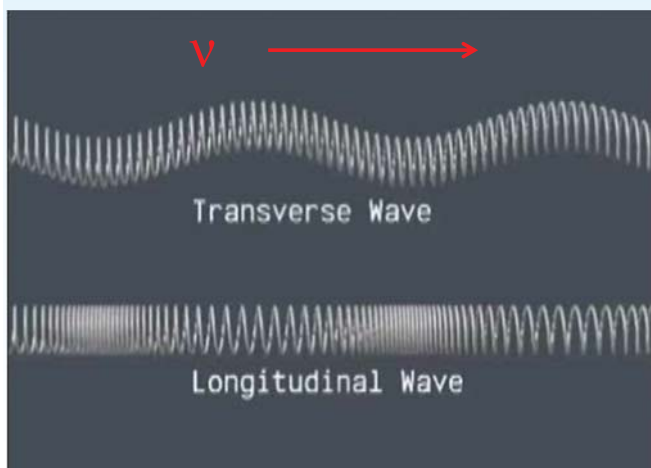
# Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



Vad är våglängden ( $\lambda$ ) för en sinus våg ?

Vad är våghastigheten ( $v$ ) ?

$$v = \lambda / T$$

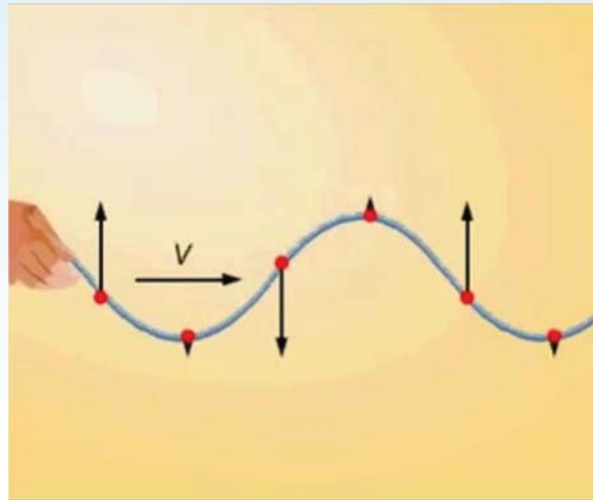




# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



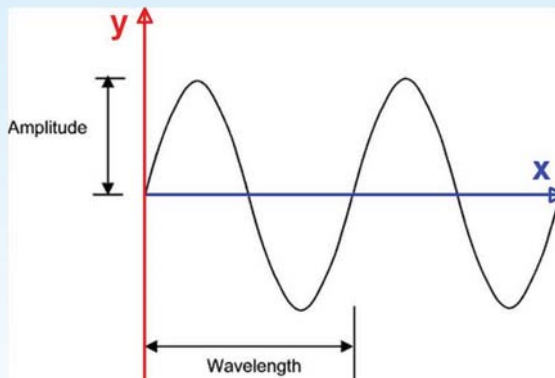
## Vågfunktionen



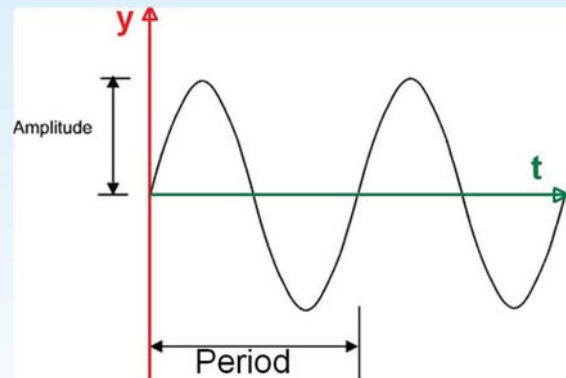
# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



Höjden av vågen som funktion av  
avståndet  $x$ :



Höjden av vågen som funktion av  
tiden  $t$ :



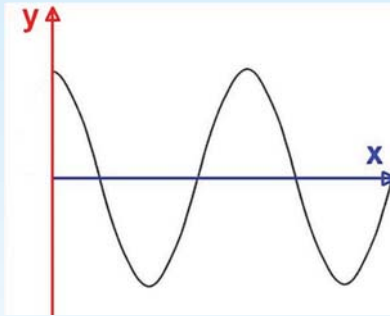
Vågfunktionen  $y(x,t)$ :

Vågfunktionen beskriver höjden av vågen som funktion av både  
avstånd och tid.

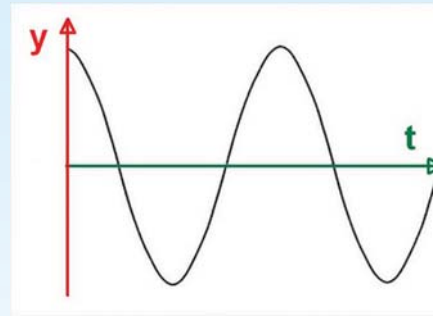




# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



$$y(x, t = 0) = A \cos kx$$



$$y(x = 0, t) = A \cos \omega t$$

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (\text{sinusoidal wave moving in } +x\text{-direction})$$

+ om vågen rör sig i den negativa x riktningen



# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (\text{sinusoidal wave moving in } +x\text{-direction})$$

Amplitud:  $A$

Vågtal:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Vinkelfrekvens:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$v = \lambda / T$$

$$f = 1 / T$$

Formelsamling

$$v = \lambda / T = (2\pi/k) / (2\pi/\omega) = \omega / k$$



# Mekaniska vågor: Sammanfattning



Vågfunktionen:  $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$

Hastighet och acceleration:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$

Vågekvationen:  $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$

Våghastighet:  $v = \lambda / T = \omega / k$



# Mekaniska vågor Våg hastighet



## Våg hastighet och sträng egenskaper



<https://www.youtube.com/watch?v=ttqLyWFINJI>



# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



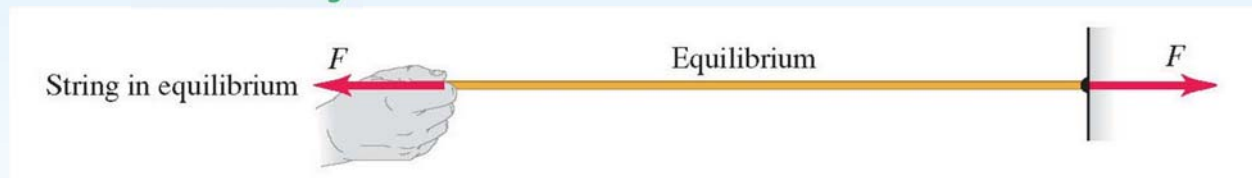
Våghastigheten beror på två saker:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Formelsamling

Spännkraften

Strängens massa per längdenhet



Mer generellt:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Restoring force returning the system to equilibrium}}{\text{Inertia resisting the return to equilibrium}}}$$



# Mekaniska vågor

## Reflektioner



# Reflektion av vågor





# Mekaniska vågor

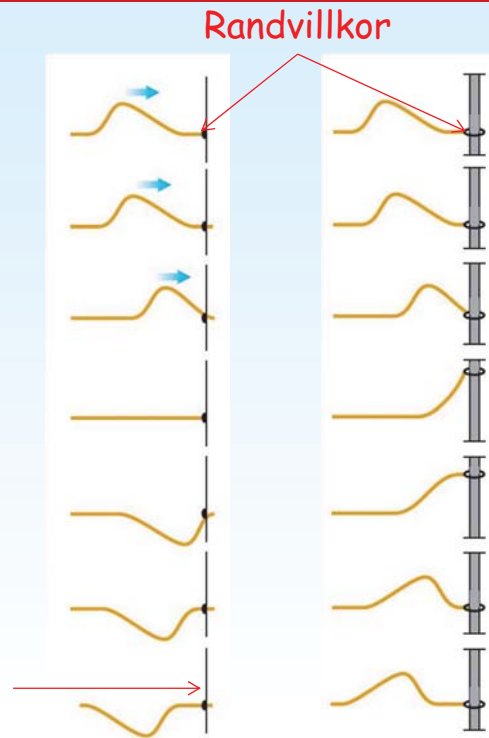
## Reflektioner



### Reflektion av en våg



Ställningen orsakar en motriktad kraft som inverterar vågen.



# Mekaniska vågor

## Reflektioner



Vågfunktionen av två vågor ges typiskt av summan av de två individuella vågfunktionerna.

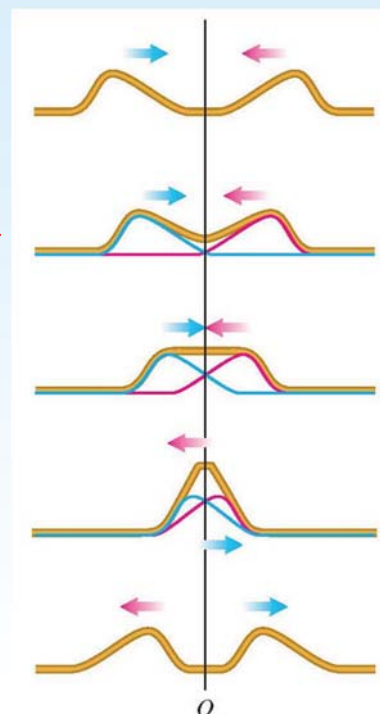
$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Detta kallas för **superpositions principen** !

Denna princip gäller när vågekvationen för vågorna är linjär dvs den innehåller bara funktionen  $y(x,t)$  till första ordningen.

Sinusvågor t.ex. följer superpositions principen för deras vågekvation är linjär:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$







# Mekaniska vågor: Stående vågor



## Stående vågor



<https://www.youtube.com/watch?v=NpEevfOU4Z8>



# Mekaniska vågor: Stående vågor



<https://www.youtube.com/watch?v=-gr7KmTOrx0>

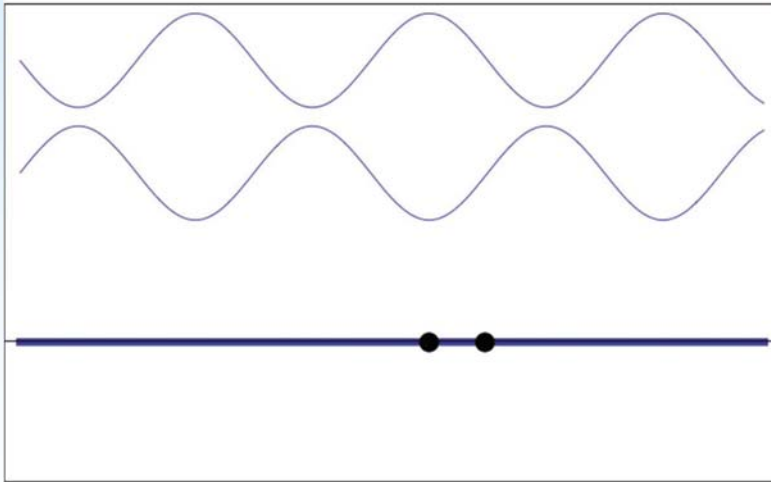


# Mekaniska vågor: Stående vågor



**Två vågor med samma frekvens och våglängd passerar varandra:**

<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/superposition/superposition.html>



$$y_2(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$y_1(x, t) = -A \cos(kx + \omega t)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$



# Mekaniska vågor: Stående vågor



Superposition av två vågor:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

+

Trigonometri:  $\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$

=

~~$$Y(x, t) = A[-\cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) + \cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)]$$~~

=

**Vågfunktionen för en stående våg**

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \sin kx \sin \omega t$$



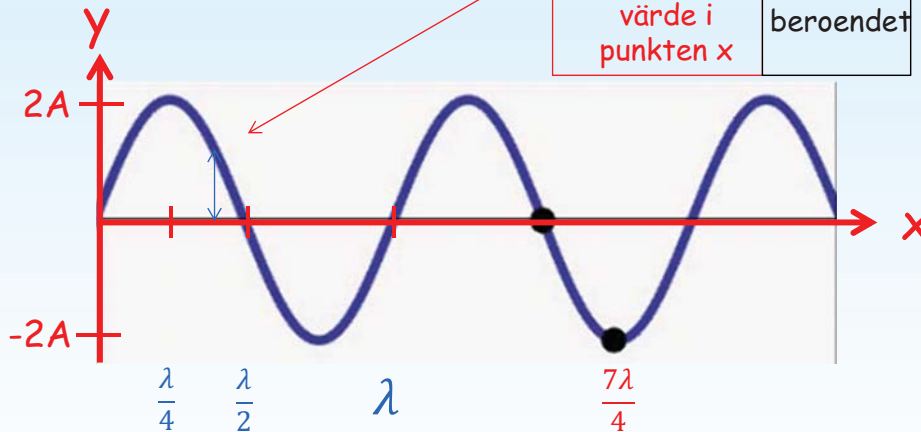
# Mekaniska vågor: Stående vågor



$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t)$$

Ger max-min  
värde i  
punkten x

Ger tids-  
beroendet



$$y\left(\frac{7\lambda}{4}, t\right) = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{7\lambda}{4}\right) \sin(\omega t) = 2A \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \sin(\omega t) = -2A \sin(\omega t)$$



# Mekaniska vågor: Stående vågor



## Noder:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \sin kx \sin \omega t$$

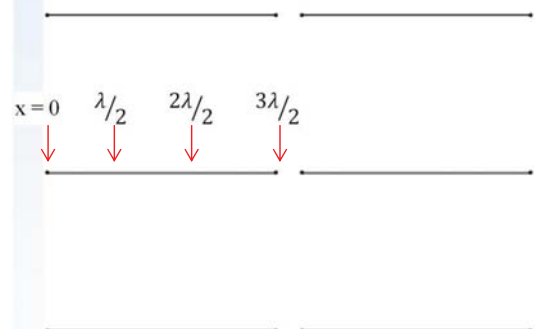
Noderna ges av  $\sin(kx) = 0$

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi,$$

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{4\pi}{k},$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{4\lambda}{2}, \quad \text{eftersom } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$x = 0, \frac{v}{2f}, \frac{2v}{2f}, \frac{3v}{2f}, \frac{4v}{2f}, \quad \text{eftersom } \lambda = \frac{v}{f}$$





# Mekaniska vågor: Stående vågor



Vad är hastigheten och accelerationen ?

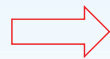
Läget:

$$y(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Vågfunktionen

Hastighet:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$



$$v_y(x,t) = 2A\omega \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Acceleration:

$$a_y(x,t) = \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$



$$a_y(x,t) = -2A\omega^2 \sin(kx) \sin(\omega t)$$



# Mekaniska vågor: Sträng instrument



## Sträng instrument

Octobas  
fiol

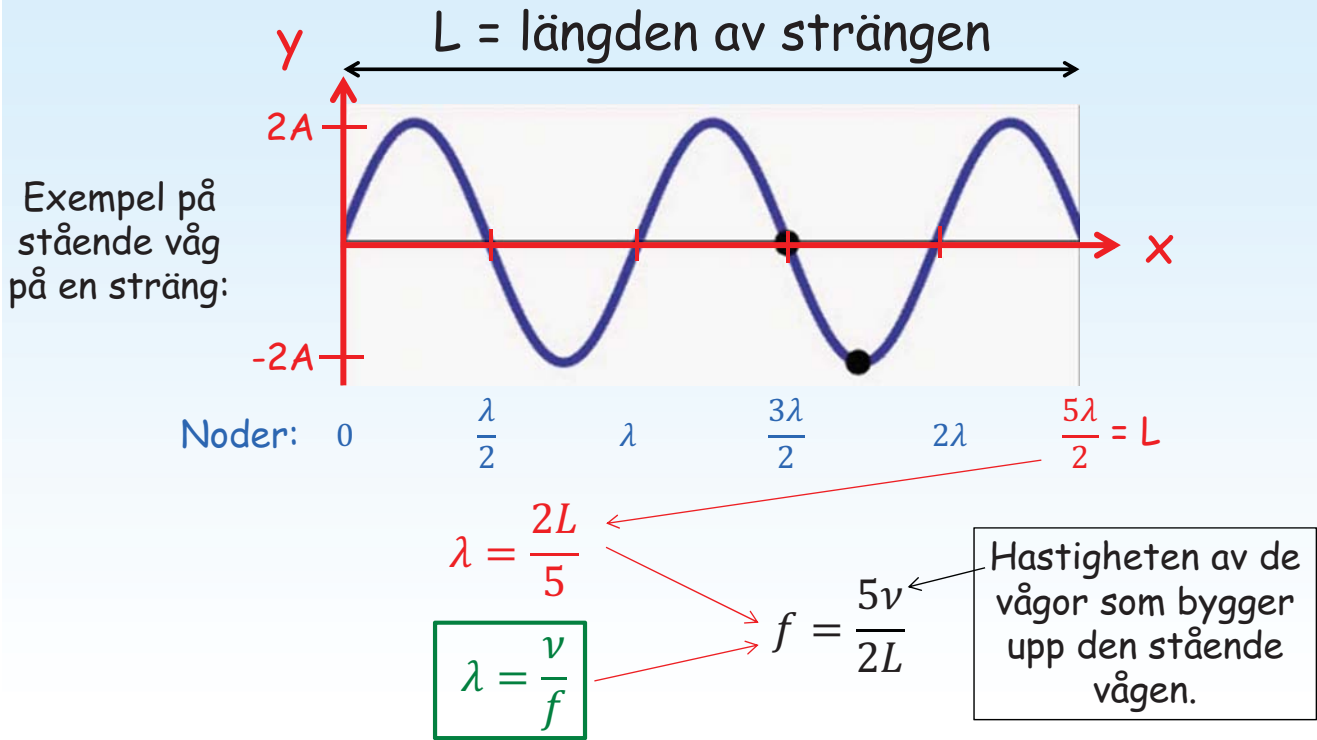


<https://www.youtube.com/watch?v=12X-i9YHzmE>





# Mekaniska vågor: Stående vågor



# Mekaniska vågor: Sträng instrument



Strängar med längden  $L$  som har noder i båda ändar:

Nodes when  $\sin(kx) = 0$

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots$$

$$= 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

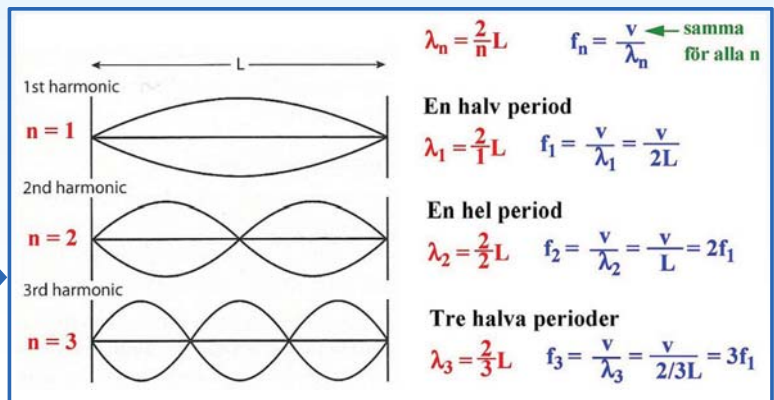
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Formelsamling

$$\lambda = v / f = 2L / n$$

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$f_1, f_2, f_3, \dots$  Harmoniska frekvenser  
 $f_1$ : Grundfrekvensen  
 $f_2, f_3, f_4, \dots$  Övertoner





# Mekaniska vågor: Sträng instrument



$$f_1 = v/2L$$

Formelsamling

$$v = \sqrt{F/\mu}$$

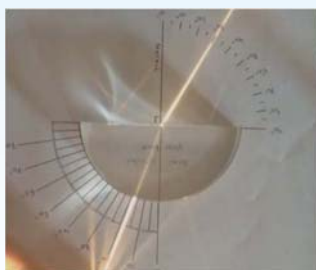
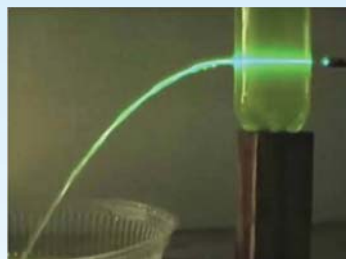
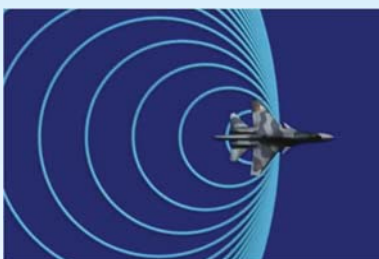
$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



Lång sträng: Låg frekvens  
Tjock sträng: Låg frekvens  
Stor spännkraft: Hög frekvens



# Vågrörelselära och optik



## Kapitel 16 - Ljud



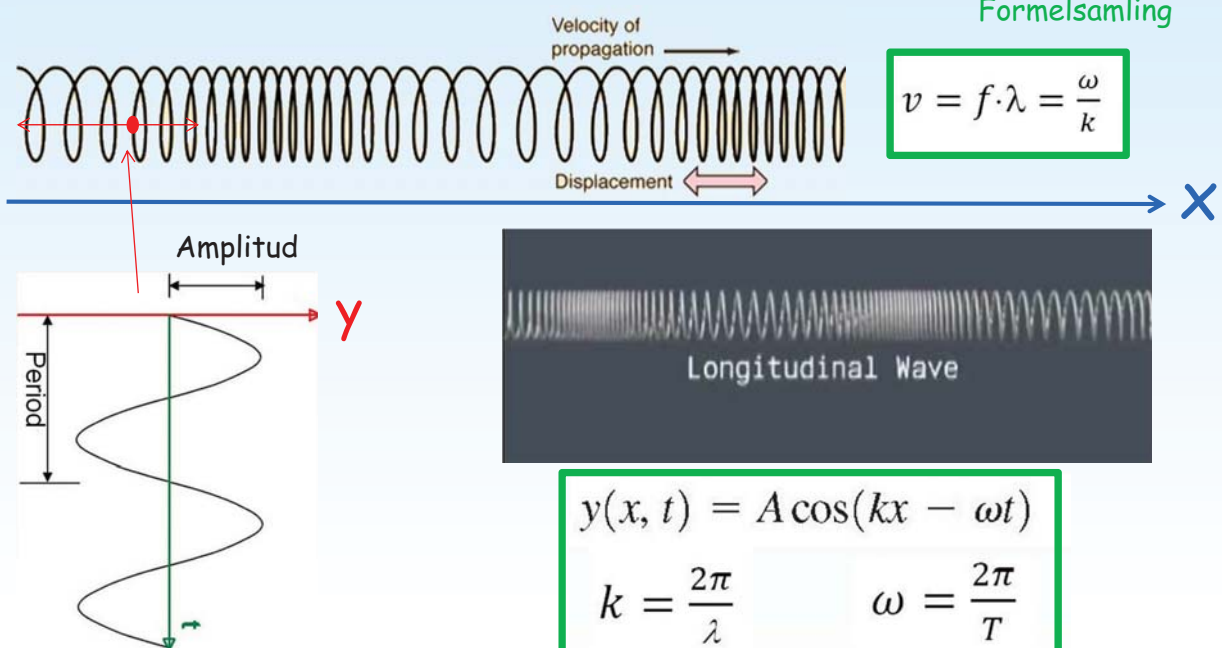
## Ljud = Tryckvågor



AtomCentral.com



## Longitudinell sinus våg





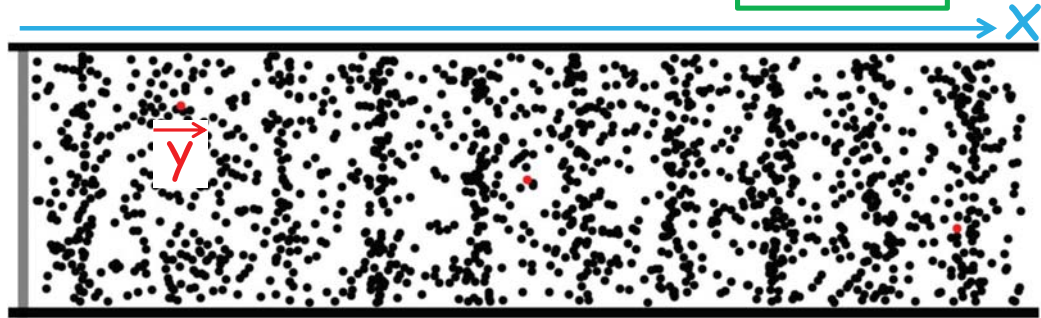
# Ljud & Tryckvågor



Vågens hastighet  $\rightarrow V$

$$v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k}$$

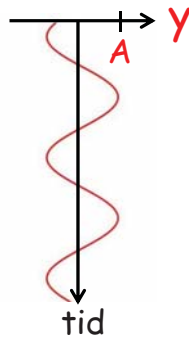
En kolv rör sig in och ut så att en longitudinell sinus våg skapas:



©2011, Dan Russell

<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>

**Y:** Luftmolekylernas rörelse



$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Formelsamling

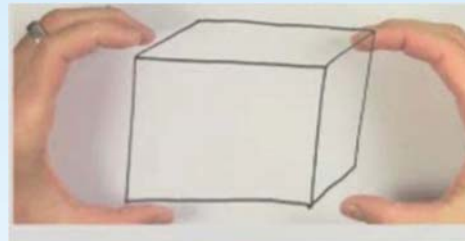


# Ljud & Tryckvågor

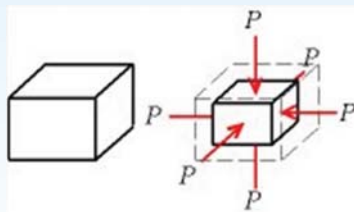


## Bulk modulen

Mått på hur svårt det är att pressa ihop ett material



Trycket som behövs för att pressa ihop materialet



Definition av bulk modulen:

$$B = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

← Tryck ändring  
← Volym ändring

Enhet: N/m<sup>2</sup>

Tryckändringen som orsakas av en volymändring:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

$\Delta p > 0$  tryck ökning  
 $\Delta V < 0$  volym minskning



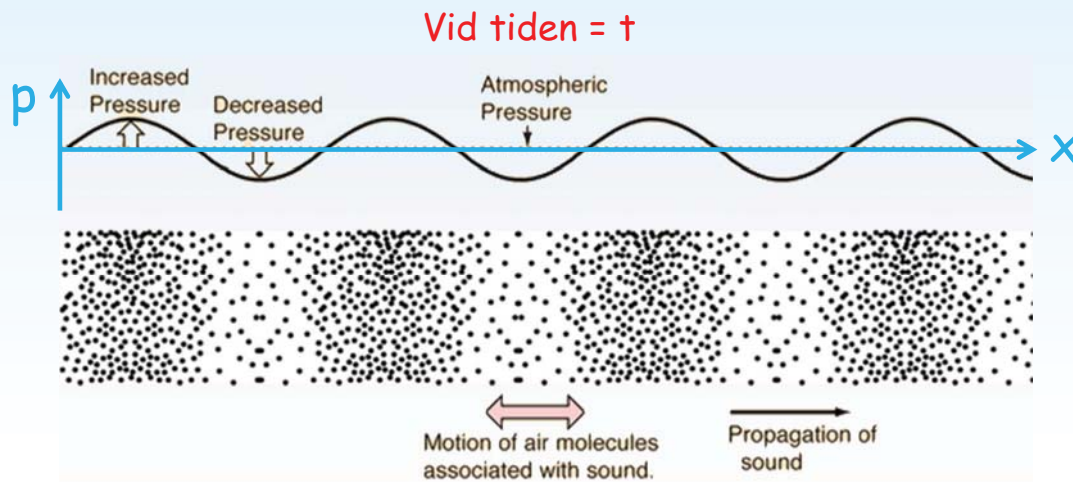


# Ljud & Tryckvågor



Tryckfunktionen:  $p(x, t) = BkA \sin(kx - \omega t)$

Amplituden:  $p_{max} = BkA$  Den maximala tryck variationen



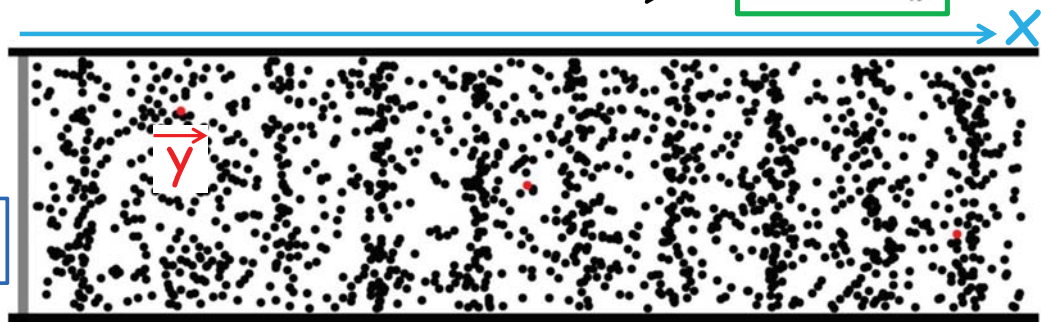
# Ljud & Tryckvågor



Vågens hastighet  $v \rightarrow$   $v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k}$

En kolv rör sig in och ut:

$\Delta p = -B \Delta V/V$

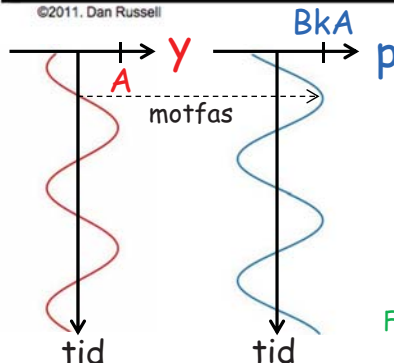


©2011, Dan Russell

<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>

**y:** Luft molekylernas rörelse

**p:** Trycket vid läget x



Formelsamling

Vågfunktionen:  
 $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$

Tryckfunktionen:  
 $p(x, t) = BkA \sin(kx - \omega t)$

$p_{max} = BkA = \rho \omega v A$



# Ljud Hastighet



## Ljud hastigheten



Vincent Hedberg - Lunds Universitet

67



# Ljud Hastighet



Allmänt:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Restoring force returning the system to equilibrium}}{\text{Inertia resisting the return to equilibrium}}}$$

Sträng:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

F: Spänn kraft  
 $\mu$ : Massa per längdenhet

Vätska:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B: Bulk modulen  
 $\rho$ : Densiteten

Fasta  
material:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Y: Young modulen  
 $\rho$ : Densiteten

Gas:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B: Bulk modulen  
 $\rho$ : Densiteten

Formelsamling

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

68



# Effekt av en mekanisk våg på en sträng



**Vågens effekt (P):** Den momentana hastigheten med vilken energi transporteras av vågen. ( $P$  = energi per tidsenhet)

Unit: W or J/s

Allmänt för effekt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{instantaneous rate at which force } \vec{F} \text{ does work on a particle})$$

Vågens effekt (P):

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t)$$

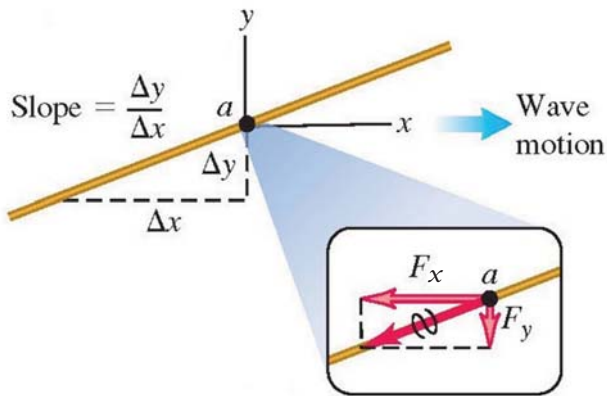
$y$  är den enda riktningen där hastigheten inte är noll



# Mekaniska vågor Effekt



## Våg på en sträng



Förhållandet mellan kraften i y-riktningen till kraften i x-riktningen ges av strängens lutning som ges av derivatan:

$$\text{Slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$F_y(x, t) = -F_x \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$F_y$  är i negativ y-riktning



# Mekaniska vågor Effekt



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

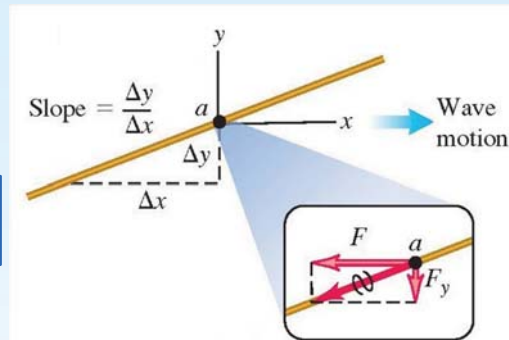
$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t)$$

$$F_y(x, t) = -F_x \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F_x \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

Vågens effekt:

$$P(x, t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$



$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t)$$

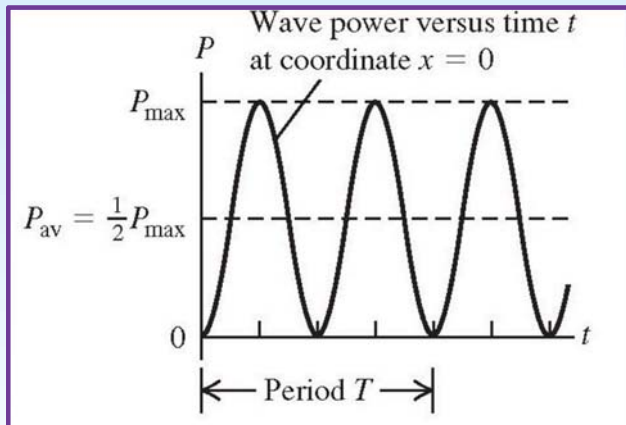
$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$





# Mekaniska vågor

## Effekt



**Vågens effekt:**

$$P(x, t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$P_{max} = Fk\omega A^2 = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} Fk\omega A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

Formelsamling



# Mekaniska vågor

## Effekt



# Ljudvågens effekt







# Ljud Effekt



Vågens effekt (P):

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t)$$

Tryckfunktionen (p):

$$p(x, t) = BkA \sin(kx - \omega t)$$

Tryck = kraft per ytenhet

Vågfunktionen (y):

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

Vågeffekt per ytenhet:

$$P(x, t) = p(x, t)v_y(x, t) = [BkA \sin(kx - \omega t)][\omega A \sin(kx - \omega t)]$$

Effekt Tryck  
per m<sup>2</sup> =  $B\omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t)$

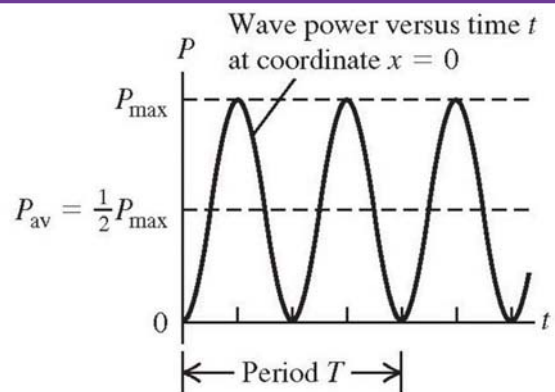


# Ljud Effekt



Vågeffekt per ytenhet:

$$P(x, t)/Area = B\omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$



Maximal effekt:  $\frac{P_{max}}{Area} = B\omega k A^2$

Medeleffekt:  $\frac{P_{av}}{Area} = \frac{1}{2}B\omega k A^2$



# Ljud Effekt



## Lite övning i algebra:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{B/\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \Rightarrow \sqrt{B} = v\sqrt{\rho}$$

$$\frac{P_{av}}{Area} = \frac{1}{2} B \omega k A^2 = \frac{1}{2} B \omega \frac{\omega}{\sqrt{B/\rho}} A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} (\omega A)^2 = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 v$$

$$\frac{P_{av}}{Area} = \frac{1}{2} B \omega k A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} (\omega A)^2 = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 v$$



# Ljud Effekt



**Effekt allmänt:**  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$  (instantaneous rate at which force  $\vec{F}$  does work on a particle)

### Våg effekt - sträng:

$$P(x, t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$P_{max} = Fk\omega A^2 = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} Fk\omega A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

### Formelsamling

$$P_{av} = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} (\omega A)^2$$

### Våg effekt - ljud:

$$P(x, t)/Area = B\omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$P_{max}/Area = B\omega k A^2 = \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2$$

$$P_{av}/Area = \frac{1}{2} B\omega k A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2$$

### Formelsamling

$$P_{av}/Area = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 v = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} (\omega A)^2$$



## Ljudvågens intensitet



När fisken Gulf Corvina leker skickar den ut ljudsignaler som kan nå en intensitetsnivå på 177 dB (202 dB =  $10^8 \text{ W/m}^2$  för ett helt stim).

Detta är ett av de högsta ljuden i djurvärlden och kan ge hörselskador på delfiner, sälar och sjölejon.



## Ljud Intensitet



Medeleffekten av en ljudvåg ( $P_{av}$ ):

Unit: W or J/s

$$\frac{P_{av}}{\text{Area}} = \frac{1}{2} B \omega k A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} (\omega A)^2 = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 v$$

Våg intensitet ( $I$ ): Medeleffekten som passerar en yta vinkelrät mot vågens riktning. ( $I$  = effekt per ytenhet).

Unit: W/m<sup>2</sup>

$$I = \frac{\text{Effekt}}{\text{Area}}$$

Formelsamling

$$I = \frac{P_{av}}{\text{Area}} = \frac{1}{2} B \omega k A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} (\omega A)^2 = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 v$$



# Ljud Intensitet



Tryck funktionen:

$$p(x, t) = BkA \sin(kx - \omega t)$$

Tryck amplituden:

$$p_{max} = BkA$$

$$A^2 = \frac{p_{max}^2}{B^2 k^2}$$

$$I = \frac{1}{2} B \omega k A^2 = \frac{1}{2} B \omega k \frac{p_{max}^2}{B^2 k^2} = \frac{1}{2B} \frac{\omega}{k} p_{max}^2 = \frac{1}{2B} \sqrt{\frac{B}{\rho}} p_{max}^2 = \frac{p_{max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$$

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

$$p_{max} = BkA = \rho \omega v A$$

$$I = \frac{1}{2} \rho (\omega A)^2 v = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} (\omega A)^2 = \frac{p_{max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$$

$$I = \frac{p_{max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$$

Intensiteten är proportionell mot kvadraten på tryck amplituden.



# Ljud Intensitet

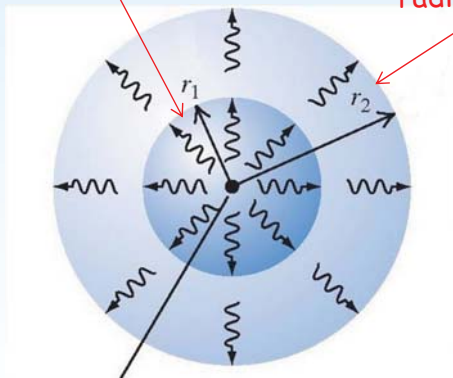


Intensiteten genom en sfär med radien  $r_1$

$$I_1 = \frac{P_{av}}{4\pi r_1^2}$$

Sfär med radien  $r_1$

Sfär med radien  $r_2$



Källa med medeleffekten  $P_{av}$

Om man bortser från effektförluster

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (\text{inverse-square law for intensity})$$



## Decibel skalan

Smärtgränsen:  
120 dB = 1 W/m<sup>2</sup>

Gulf Corvina:  
200 dB = 10<sup>8</sup> W/m<sup>2</sup>

Saturn V raket:  
220 dB = 10<sup>10</sup> W/m<sup>2</sup>

Krakatoa:  
310 dB = 10<sup>19</sup> W/m<sup>2</sup>



Intensitetsnivån ( $\beta$ ) med decibel (dB) som enhet:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \longleftrightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}$$

Formelsamling

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  är en referensnivå.

$I_0$  = gränsen för mänskligt hörande (approximativt).

$\beta = 0 \text{ dB}$  för  $I = I_0$   
 $\beta = 120 \text{ dB}$  för  $I = 1 \text{ W/m}^2$

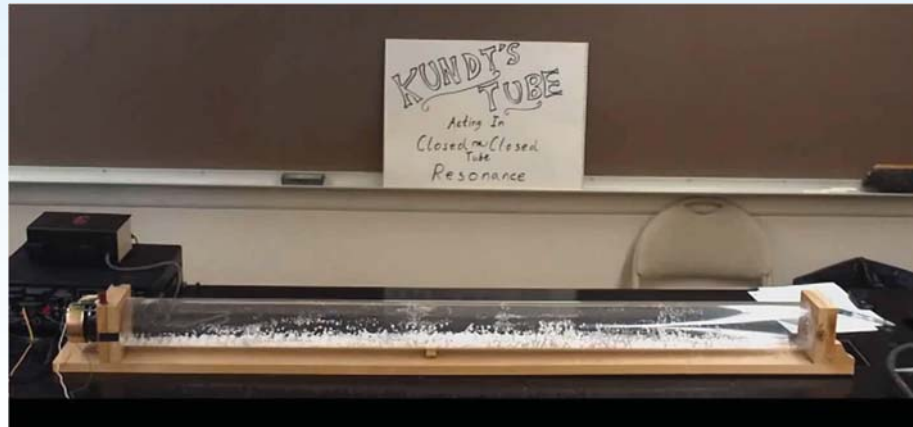




# Ljud Stående våg



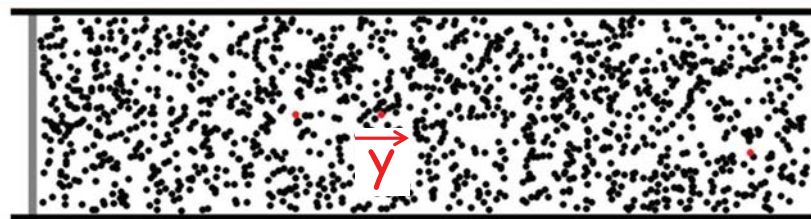
## Ljud och stående våg



# Ljud Stående våg



En kolv rör sig in och ut:



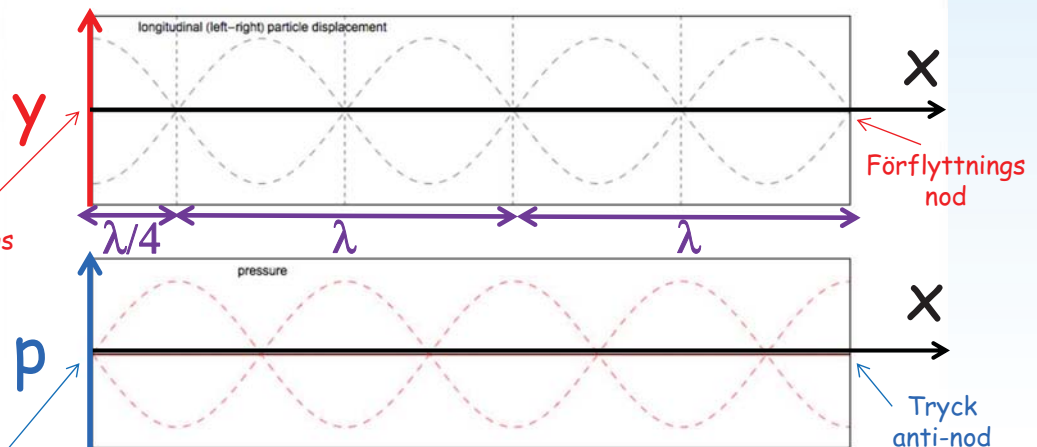
©2012, Dan Russell

Luft  
molekylernas  
rörelse:

Förflyttnings  
anti-nod

Trycket:

Tryck nod



$$L = n \lambda / 4 = \lambda 9/4$$



# Ljud Stående våg



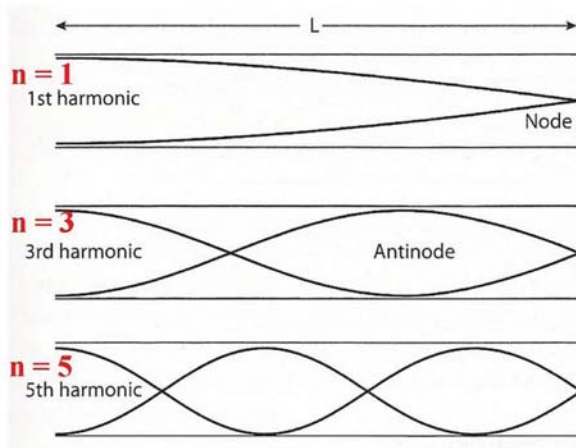
## Stående våg i en stängd pipa:

$$\lambda_n = \frac{4}{n}L \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} \quad \text{där hastigheten (v) är samma för alla n}$$

Atmosfärstryck

Förflyttnings  
anti-nod

Tryck-nod



En kvarts våg

$$\lambda_1 = \frac{4}{1}L \quad f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{1v}{4L}$$

Tree kvarts vågor

$$\lambda_3 = \frac{4}{3}L \quad f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$

Fem kvarts vågor

$$\lambda_5 = \frac{4}{5}L \quad f_5 = \frac{v}{\lambda_5} = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

**NOTERA:** n = 2, 4, 6 kan inte hända i en stängd pipa



# Ljud Stående våg



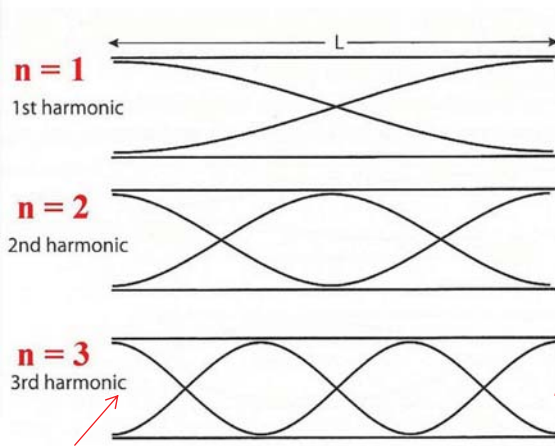
## Stående våg i en öppen pipa:

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} \quad \text{där hastigheten (v) är samma för alla n}$$

Atmosfärstryck

Förflyttnings  
anti-nod

Tryck-nod



En halv våg

$$\lambda_1 = \frac{2}{1}L \quad f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{1v}{2L}$$

Två halva vågor

$$\lambda_2 = \frac{2}{2}L \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{2v}{2L} = 2f_1$$

Tre halva vågor

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$

Anti-nod

Anti-nod



# Ljud Stående våg

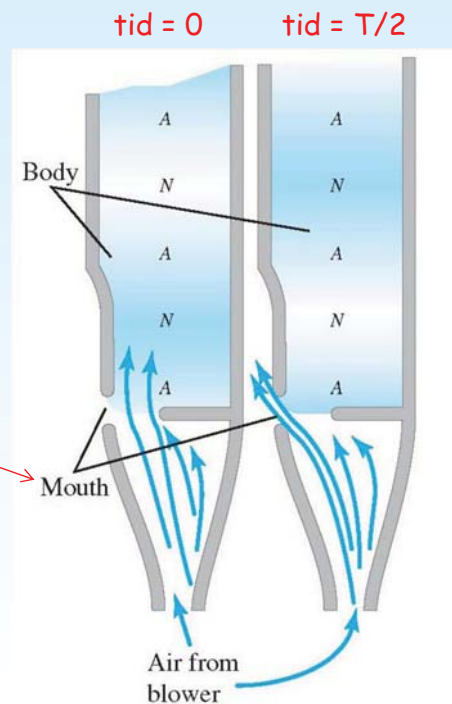


**Orgelpipa:** Luftström underifrån.

**Stående våg:** Uppstår om luft-hastighet och pipans längd är valda korrekt.

**Mynning:** Pipan är öppen i botten och detta ger en tryck-nod (förflyttnings anti-nod).

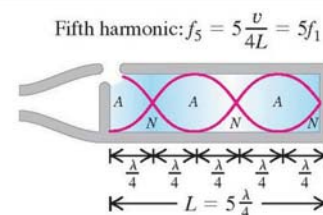
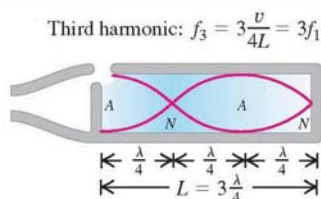
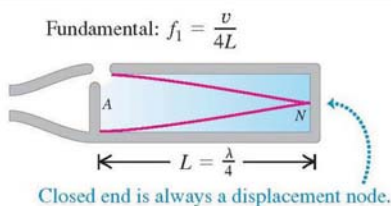
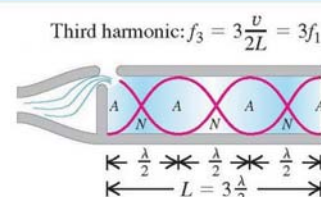
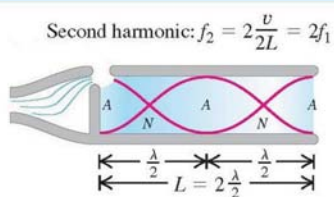
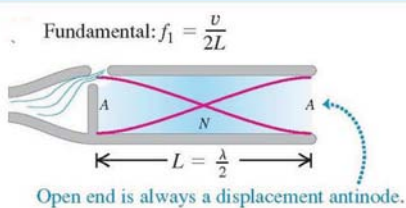
**Luftström:** Går varierande in i pipan och ut genom mynningen.



# Ljud Stående våg



**Jämför öppen-öppen med öppen-stängd pipa:**



Avståndet mellan två noder är  $\lambda/2$  !

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

$$f_n = \frac{nv}{4L} \quad (n \text{ udda})$$

Formelsamling

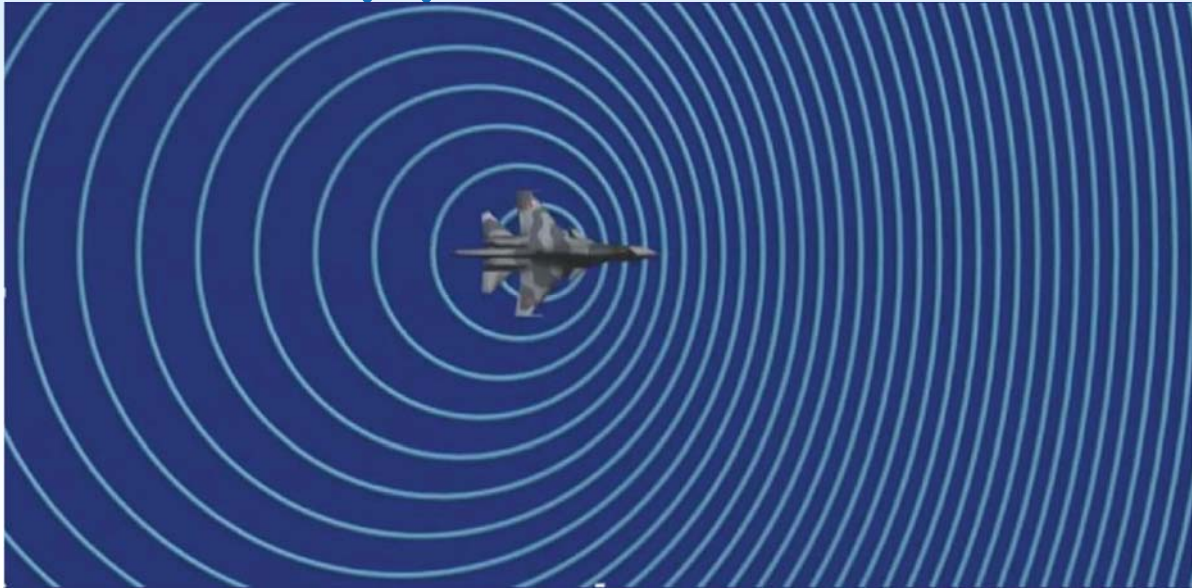




# Ljud Doppler effekt



## Doppler effekt



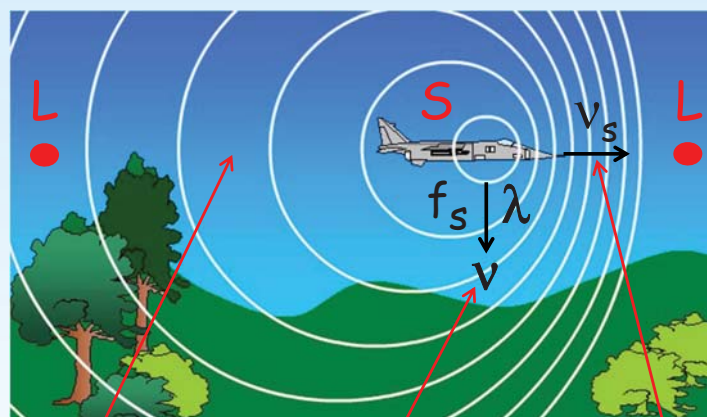
<https://www.youtube.com/watch?v=-Zu5SGllmwc>



# Ljud Doppler effekt



Tiden det tar för en ljudvåg att nå lyssnaren (L) blir längre om källan (S) rör sig bort.



Om källan (S) rör sig mot lyssnaren (L) tar det kortare tid för ljudvågen att nå lyssnaren.

$\lambda_{\text{behind}}$  längre

$$\lambda = \frac{v}{f_s}$$

$\lambda_{\text{in front}}$  kortare

$$\lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_s}{f_s}$$

$$\lambda_{\text{in front}} = \frac{v - v_s}{f_s}$$





# Ljud Doppler effekt



Komplikation: Lyssnaren rör på sig också

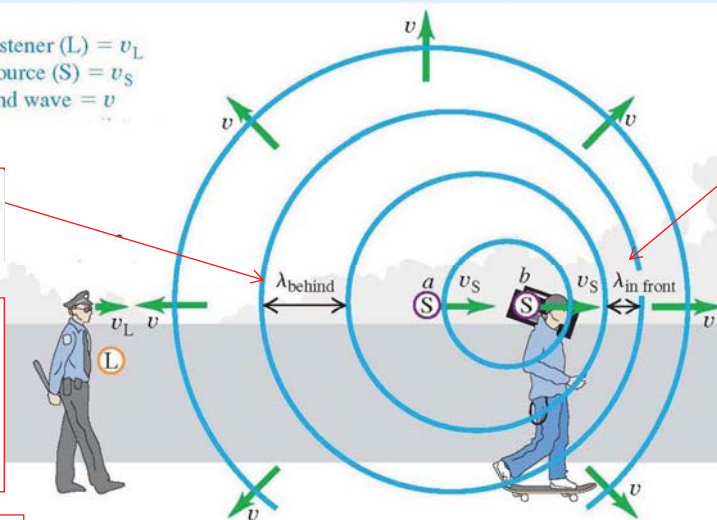
- Velocity of listener (L) =  $v_L$
- Velocity of source (S) =  $v_S$
- Speed of sound wave =  $v$

$$\lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_S}{f_S}$$

$$\lambda_{\text{in front}} = \frac{v - v_S}{f_S}$$

Allmänt gäller:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$



Vågen närmar sig L med  $v + v_L$

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda_{\text{behind}}} = \frac{v + v_L}{(v + v_S)/f_S} = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$$

ändring av frekvensen



# Ljud Doppler effekt



$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$$

Denna formel fungerar alltid om positiv riktning av hastigheten är definierad från lyssnaren mot källan !

Formelsamling

positiv riktning →

← positiv riktning



$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S$$



$$f_L = \frac{v - v_L}{v + v_S} f_S$$



$$f_L = \frac{v - v_L}{v - v_S} f_S$$



$$f_L = \frac{v + v_L}{v - v_S} f_S$$



# Ljud Doppler effekt

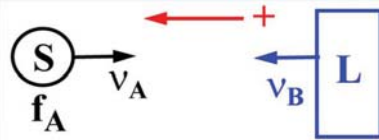


## Komplikation: Ljudet reflekteras

Ljud sänds ut av A och reflekteras mot B.  
Vilken frekvens hör A ?



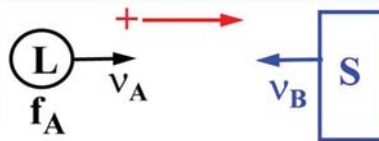
Steg 1.



$$f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S} f_S = \frac{v+v_B}{v-v_A} f_A$$

Betrakta B som lyssnare.

Steg 2.



$$f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S} f_S = \frac{v+v_A}{v-v_B} \frac{v+v_B}{v-v_A} f_A$$

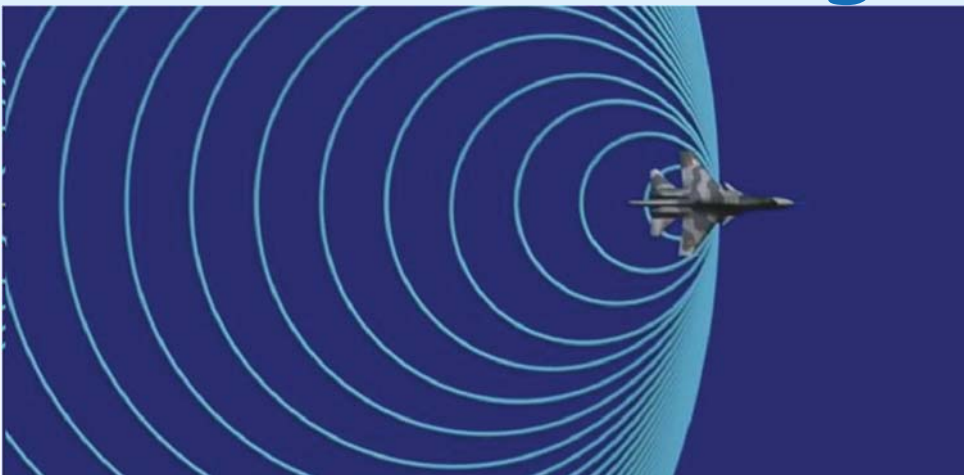
Betrakta B som ljudkälla.



# Ljud chockvåg



## Chockvåg



$$\lambda_{\text{in front}} = \frac{v - v_S}{f}$$

$v$ : Ljudhastigheten  
 $v_S$ : Planets hastighet

$v_S > v$  Chockvåg bildas (inte bara när  $v_S = v$ )

$v_S > v$  Ingen ljudvåg framför planet

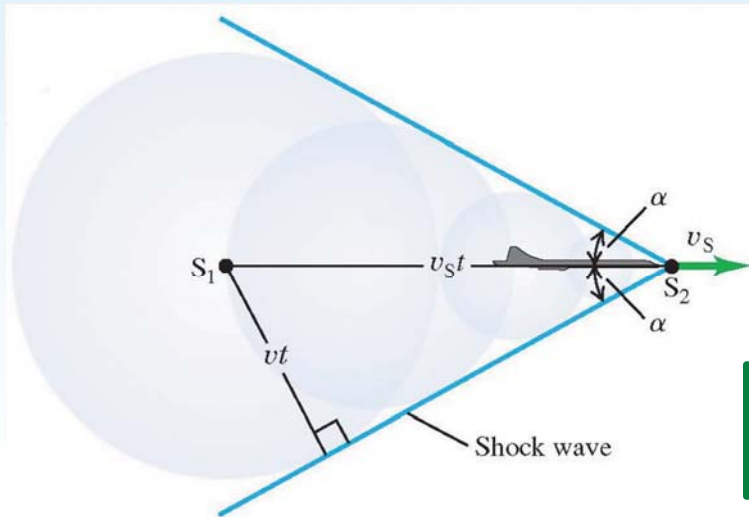


# Ljud chockvåg



En konisk chockvåg bildas när planet flyger fortare än ljudhastigheten.

En serie av circulära vågtoppar från planet interfererar konstruktivt längs en linje som ges av vinkeln  $\alpha$ .



$v$ : Ljudhastigheten  
 $v_s$ : Planets hastighet

Planets hastighet i Machtal:

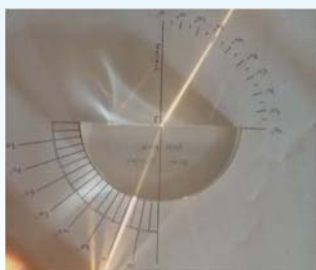
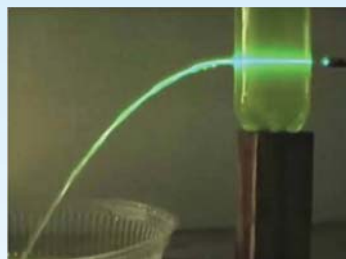
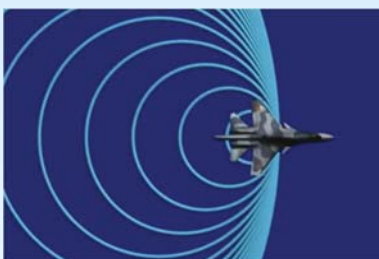
$$N_M = \frac{v_s}{v}$$

$$\sin \alpha = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{N_M}$$

Formelsamling



# Vågrörelselära och optik



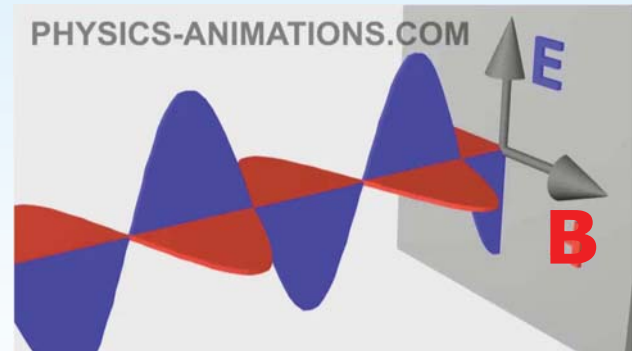
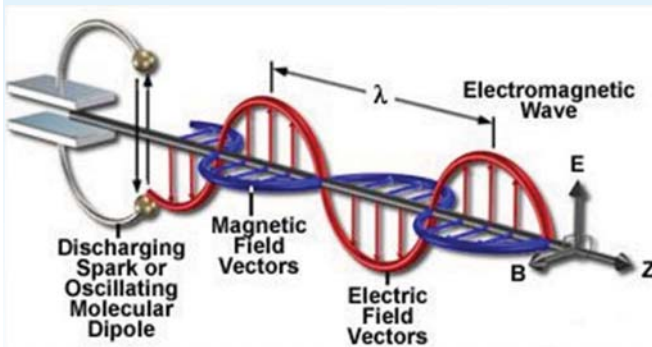
## Kapitel 32 - Elektromagnetiska vågor



# Elektromagnetiska vågor Maxwells ekvationer



Den elektromagnetiska vågen består av ett elektriskt och ett magnetiskt fält.



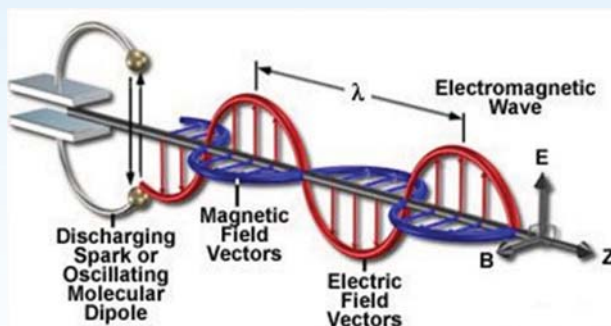
# Elektromagnetiska vågor Maxwells ekvationer



Elektromagnetiska vågor skapas av **laddade partiklar** som är **i rörelse**.

En elektromagnetisk våg kan **transportera energi i vakuum** (men inte en mekanisk våg).

En elektromagnetisk våg kan skapas av en urladdningskondensator:



Fältet är starkast 90 grader mot laddningarnas rörelse och noll i samma riktning som laddningarnas rörelse.

När **laddningarna** åker upp och ner i gnistgapet skapas ett **magnetisk fält** i horisontal planet.

Det varierande magnet fältet generar ett vertikalt **elektriskt fält**.

Det magnetiska och elektriska fälten utbreder sig i rymden som en **elektromagnetisk våg**.



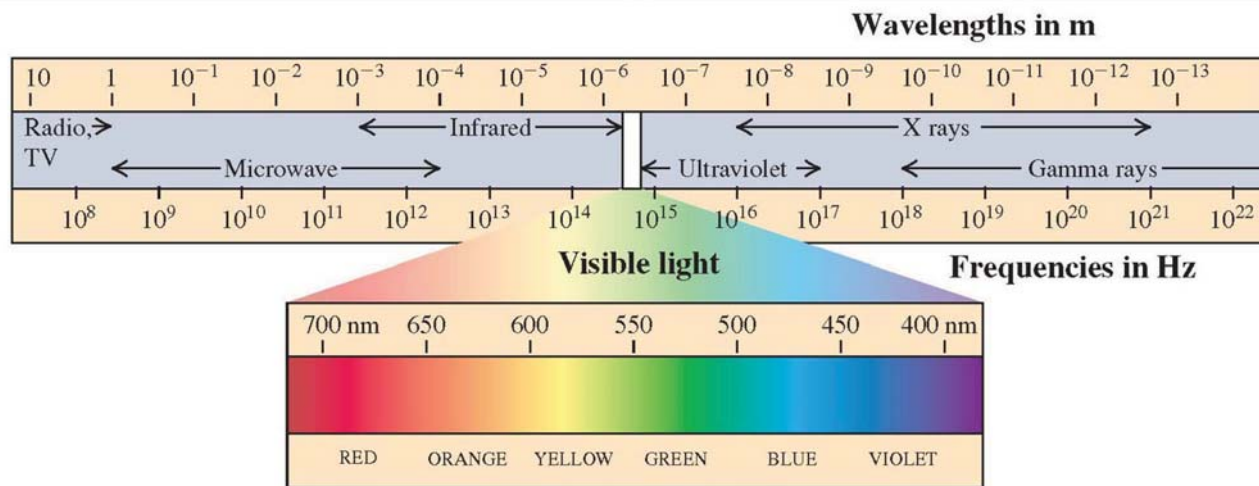


# Elektromagnetiska vågor



Det elektromagnetiska spektrumet

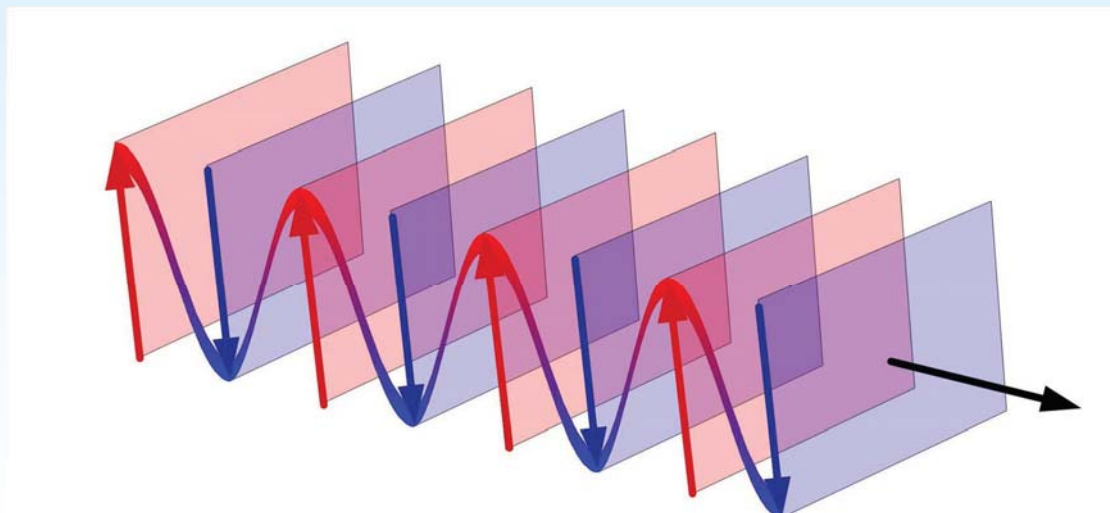
$$\lambda = c / f$$



# Elektromagnetiska vågor



Vågfronter: ytor med konstant fas

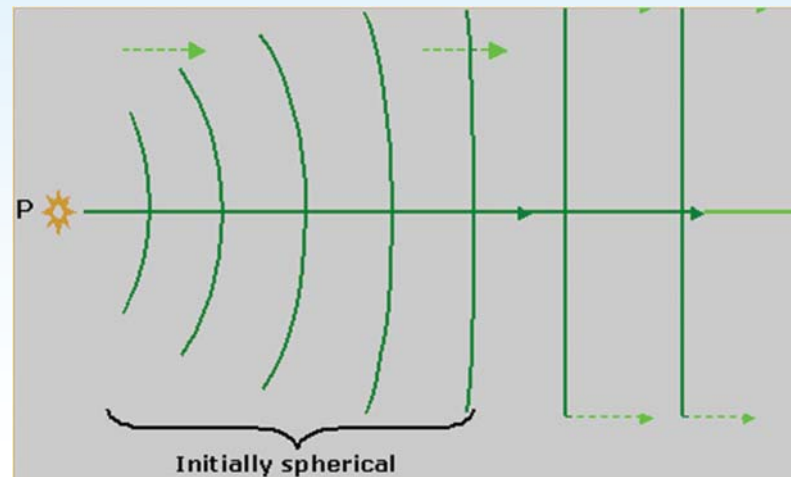




# Elektromagnetiska vågor



Vågfronter beror på avståndet till källan



# Elektromagnetiska vågor

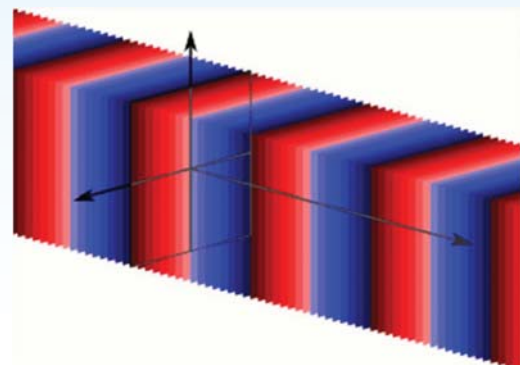
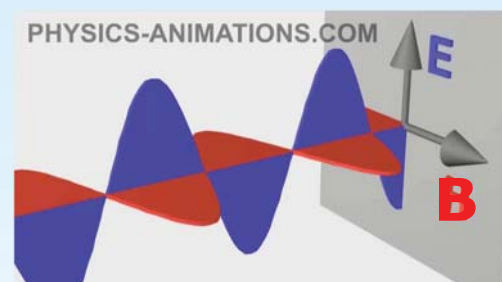


Elektromagnetiska vågor är transversella eftersom E- och B-fälten är vinkelräta mot utbredningsriktningen.

En **plan våg** är en våg med konstant frekvens vars vågfronter är **oändliga parallella plan** med konstant topp-till-topp-amplitud.

Vid en viss punkt och tid har **alla E och B-vektorerna** i planet **samma storlek**.

**Fullständiga plana vågor existerar inte** eftersom endast en våg med oändlig utsträckning kan vara plan. Men många vågor är approximativt plana vågor i ett lokaliserat område i rymden.





# Elektromagnetiska vågor



För **plana elektromagnetiska vågor** kan man hitta relationer mellan storleken på det magnetiska och elektriska fältet från två av Maxwells ekvationer:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faraday's law})$$

plan våg →

$$E = cB$$

Formelsamling

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{encl}} \quad (\text{Ampere's law})$$

plan våg →

$$E = \frac{B}{\epsilon_0 \mu_0 c}$$

$\epsilon$  = Permittiviteten = Ett mediums förmåga att ha ett elektriskt fält i sig.

$\mu$  = Permeabilitet = Ett mediums förmåga att ha ett magnetiskt fält i sig.



# Elektromagnetiska vågor



**Ljushastigheten från Maxwells ekvationer:**

$$E = c B \quad \text{from Faraday's law}$$

$$E = B / (\epsilon_0 \mu_0 c) \quad \text{from Ampere's law}$$

$$\epsilon_0 \text{ is the permittivity in vacuum} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 \text{ is the permeability in vacuum} = 1.26 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$$

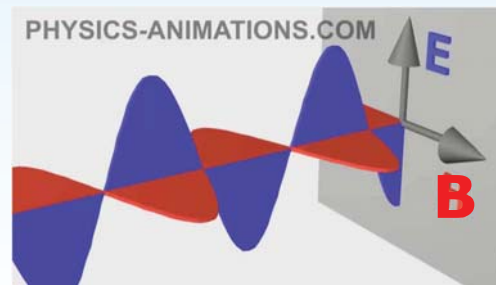


Formelsamling

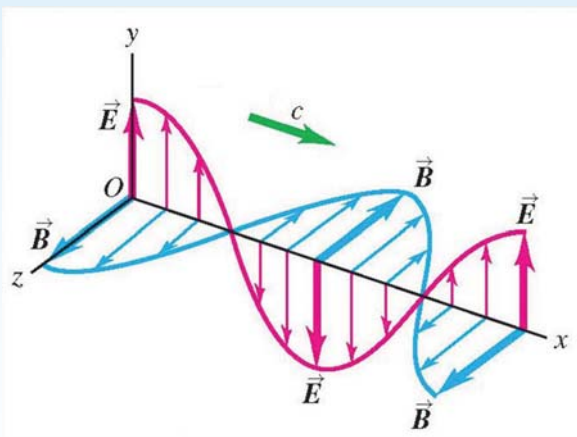
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$



# Vågfunktionen



## Den elektromagnetiska vågfunktionen för sinusformade vågor



$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

**inte samma k**  
(det ena är en riktningsvektor och den andra vågtalet)



# Elektromagnetiska vågor

## Vågfunktionen



$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

Amplituden:  $E_{\max} = c B_{\max}$

Vågtalet:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$c = \lambda / T$$

$$f = 1 / T$$

Vinkelfrekvensen:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c = \lambda / T = (2\pi/k) / (2\pi/\omega) = \omega / k$$



# Jämför vågfunktioner



## Mekaniska vågor

Formelsamling

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Amplitud:  $A$

Vågtalet:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Vinkelfrekvens:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$v = \lambda / T = \omega / k$$

## Elektromagnetiska vågor

$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

Amplitud:  $E_{\max} = c B_{\max}$

Vågtalet:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Vinkelfrekvens:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c = \lambda / T = \omega / k$$





# Elektromagnetiska vågor Vågfunktionen



I ett dielektrisk material är ljushastigheten mindre än  $c$  !

Elektromagnetiska vågor i materia:

$$\begin{aligned} c &\rightarrow v \\ \mu_0 &\rightarrow \mu \\ \epsilon_0 &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Dielektrisk konstant

$$K = \epsilon / \epsilon_0$$

Relative permeabilitet

$$K_m = \mu / \mu_0$$



# Elektromagnetiska vågor Vågfunktionen



Elektromagnetiska vågor i vakuum

$$E = c B \quad \text{from Faraday's law}$$

$$E = B / (\epsilon_0 \mu_0 c) \quad \text{from Ampere's law}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Elektromagnetiska vågor i materia

$$E = v B \quad \text{from Faraday's law}$$

$$E = B / (\epsilon \mu v) \quad \text{from Ampere's law}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Permittivitet

Permeabilitet

$$\frac{c}{v} = n = \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}} = \sqrt{K K_m} \cong \sqrt{K}$$



$$v = \frac{c}{\sqrt{K K_m}}$$

Brytnings index

Dielektrisk konstant

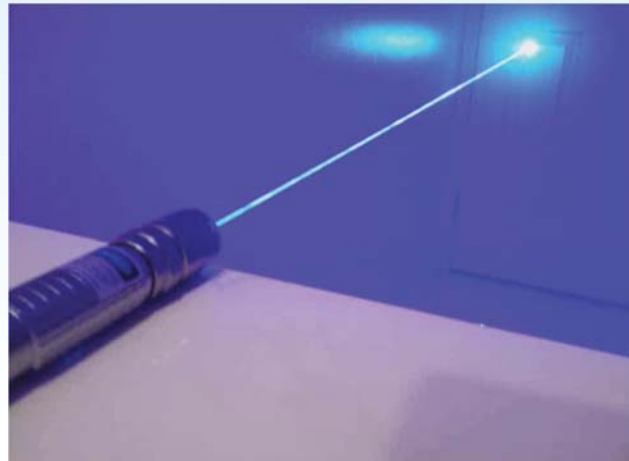
Relativ permeabilitet

$$K = \epsilon / \epsilon_0$$

$$K_m = \mu / \mu_0$$



# Effekt och intensitet



Blå Laser

Effekt = 1 W



### Energitäthet ( $u$ ):

Energi per volymenhet p.g.a. ett elektriskt och magnetiskt fält

Enhet:  $J/m^3$

### Effekt ( $P$ ):

Den momentana hastighet med vilken energi överförs längs en våg.

Enhet:  $W$  or  $J/s$

### Poynting vektorn ( $\vec{S}$ ):

Energi som överförs per tidsenhet per ytenhet = Effekt per ytenhet.

Enhet:  $W/m^2$

### Intensitet ( $I$ ):

Genomsnittlig effekt per ytenhet genom en yta som är vinkelrät mot vågriktning = medelvärdet av  $S$ .

Enhet:  $W/m^2$



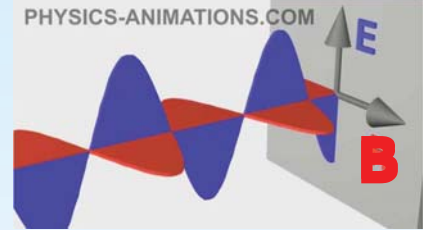
# Elektromagnetiska vågor

## Effekt och intensitet



Formelsamling

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$



Energitäthet  
(energi per volymenhet)  
från elektromagnetiskt fält:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Faradays lag:  $E = cB \implies B^2 = \epsilon_0 \mu_0 E^2$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E)^2 = \epsilon_0 E^2$$

där  $E(x, t) = E_{\max} \cos(kx - \omega t)$

Energi E-fält    Energi B-fält

**Slutsats:** De elektriska och magnetiska fälten bär på samma mängd energi.  
Energitätheten varierar med position och tid.



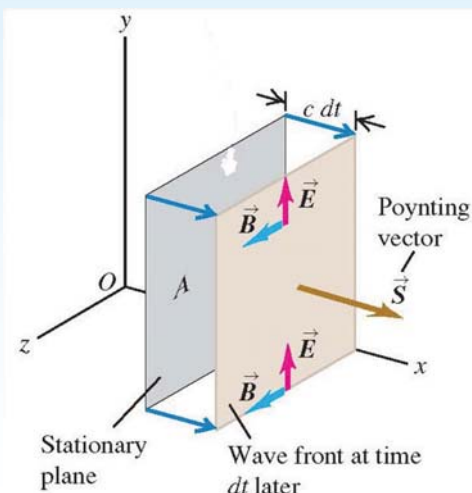
# Elektromagnetiska vågor

## Effekt och intensitet



Energi överföring = energi som överförs per tidsenhet per ytenhet.

$S$  = Effekt per ytenhet = Energi överföring = Energyflöde



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{Poynting vector in vacuum})$$

Sinusformade vågor:

Formelsamling

$$\begin{aligned} \vec{S}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(x, t) \times \vec{B}(x, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\hat{j} E_{\max} \cos(kx - \omega t)] \times [\hat{k} B_{\max} \cos(kx - \omega t)] \end{aligned}$$

$$S_x(x, t) = \frac{E_{\max} B_{\max}}{\mu_0} \cos^2(kx - \omega t)$$

Amplituden = maximal energi överföring



# Elektromagnetiska vågor Effekt och intensitet



Intensitet = medelvärdet av  $S$

$$S_x(x, t) = \frac{E_{\max} B_{\max}}{\mu_0} \cos^2(kx - \omega t)$$

medelvärdet av  $\cos^2(x) = 1/2$

$$E = c B$$

$$I = S_{\text{av}} = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c}$$

Formelsamling

$$S_{\text{av}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\max}^2$$

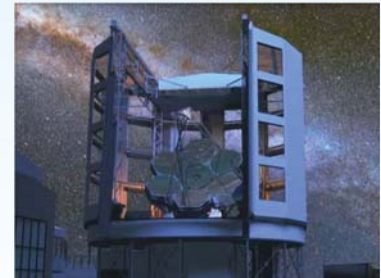
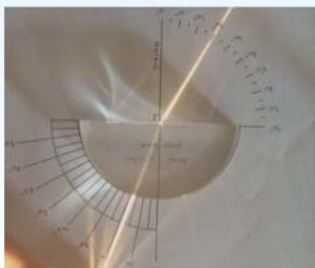
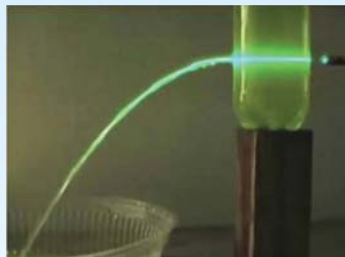
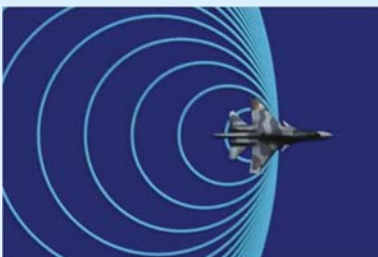
Elektromagnetiska vågor i materia:

$$\mu_0 \rightarrow \mu$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$



# Vågrörelselära och optik



## Kapitel 33 - Ljus





# Ljusets natur



Källa för elektromagnetisk strålning  
är  
elektriska laddningar i accelererad rörelse

## Termisk strålning:

Termiska rörelser av molekyler skapar elektromagnetisk strålning.

## Lampa:

En ström värmer glödtråden som sedan sänder ut värmestrålning med många våglängder.

## Laser:

Atomerna emitterar ljus koherent vilket ger (nästan) monokromatisk strålning.



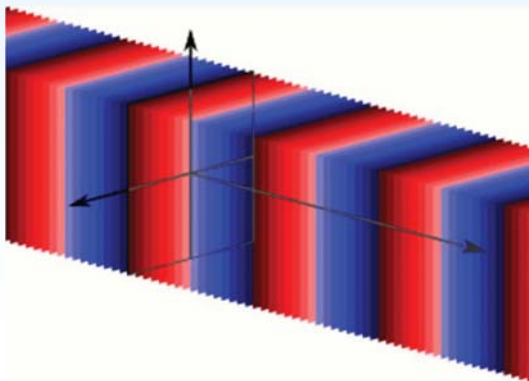
# Ljusets natur



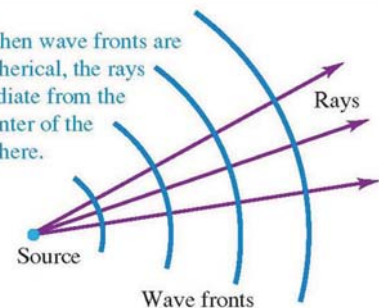
**Våg front:** yta med konstant fas.

**Plan våg:** en våg vars vågfronter är oändliga parallella plan.

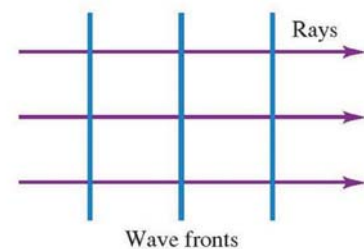
**Stråle:** tänkt linje längs riktningen för vågutbredningen.



When wave fronts are spherical, the rays radiate from the center of the sphere.



When wave fronts are planar, the rays are perpendicular to the wave fronts and parallel to each other.

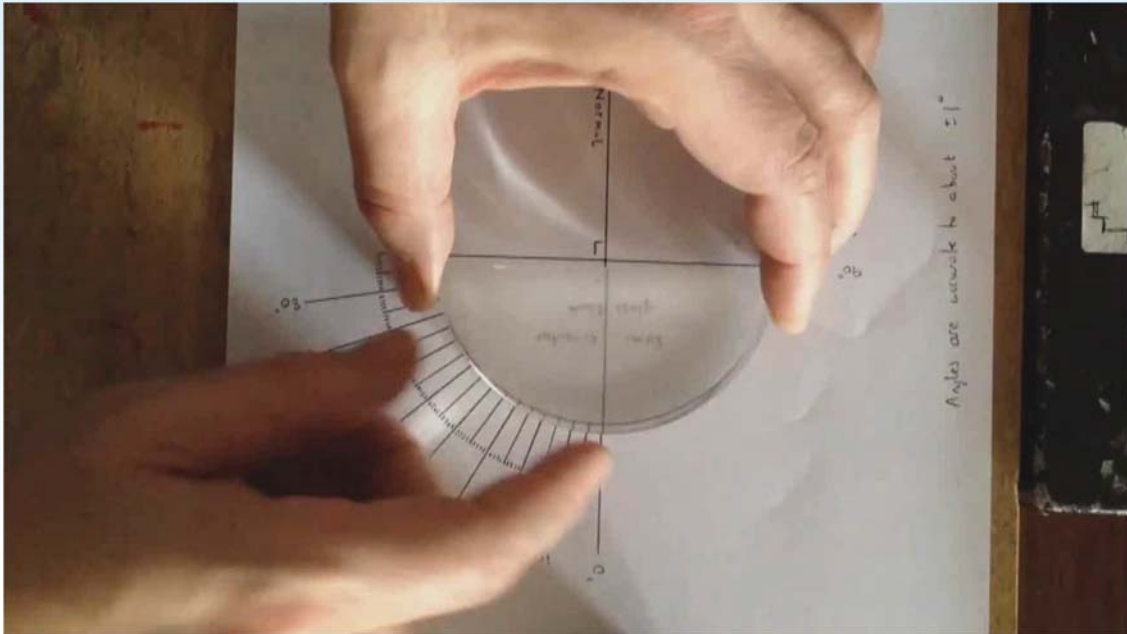




# Ljusets natur Reflektion & Refraktion



## Reflektion och refraktion



Vincent Hedberg - Lunds Universitet

121



# Ljusets natur Reflektion & Refraktion



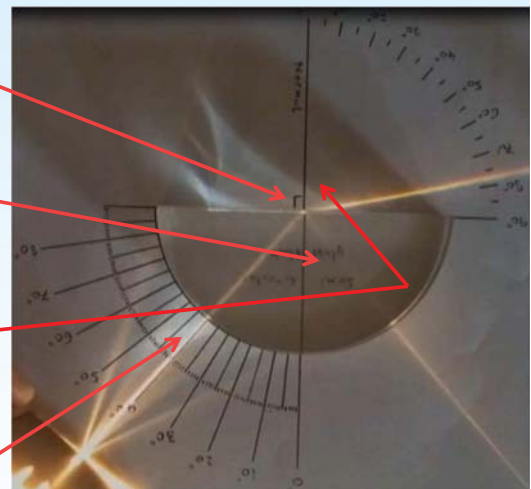
### Observationer:

Vid ytan mellan glas och luft både reflekteras och refrakteras ljuset.

Reflektionsvinkeln är densamma som den infallande vinkeln.

Brytningsvinkeln är större än den infallande vinkeln.

Vid ytan mellan luft och glas är vinkeln 90 grader och då reflekteras och bryts ljuset också med 90 grader.



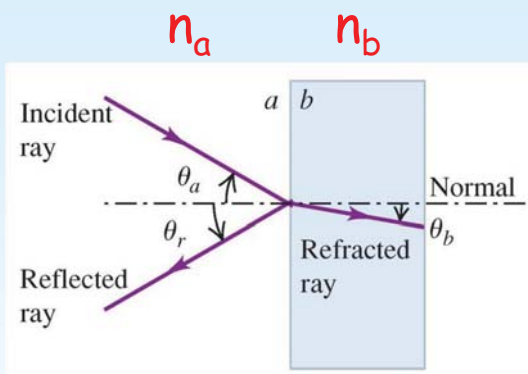
Vincent Hedberg - Lunds Universitet

122



# Ljusets natur

## Reflektion & Refraktion



$$n = \frac{c}{v} \quad (\text{index of refraction})$$

$n = 1$  i vakuum  
 $n > 1$  i ett material

Planet för infallande ljus:  
 Planet för den infallande strålen och normalen till ytan.

Den reflekterade och refrakterade strålen är i planet för det infallande ljuset.

Reflektionslagen:

$$\theta_r = \theta_a \quad (\text{law of reflection})$$

Snells lag:

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b \quad (\text{law of refraction})$$

Formelsamling



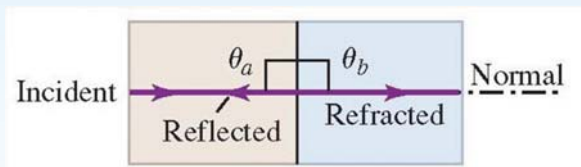
# Ljusets natur

## Reflektion & Refraktion

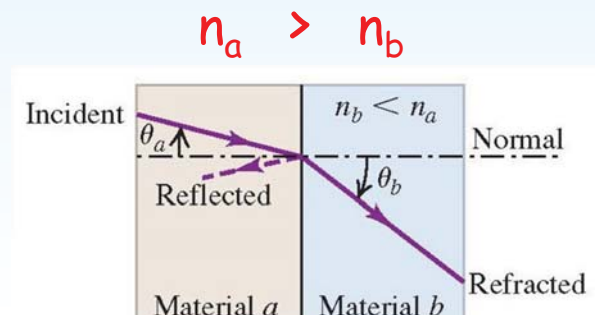
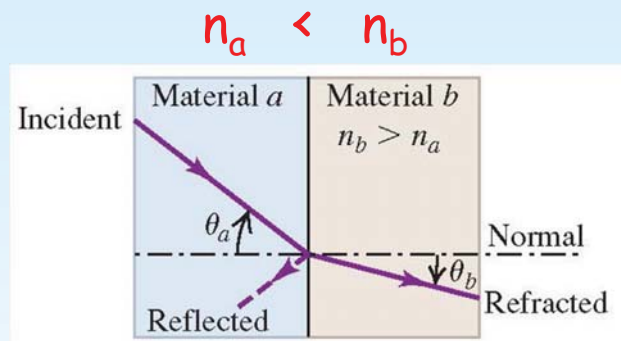


Snells law:

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b \quad (\text{law of refraction})$$



Regel:  
 Stort  $n \rightarrow$  Liten vinkel



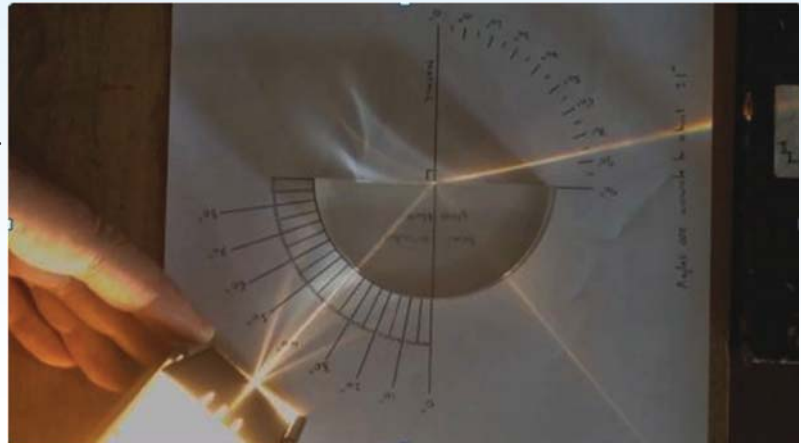


# Ljus intensitet

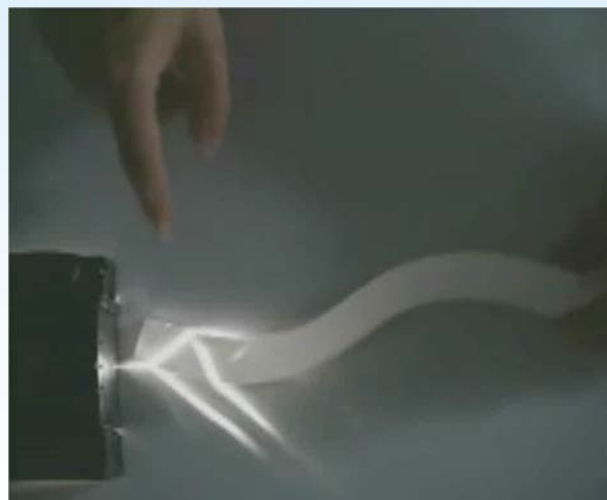
Intensiteten hos det reflekterade ljuset ökar från nästan 0% vid  $\theta = 0^\circ$  till 100% för  $\theta = 90^\circ$ .

**Intensiteten** hos det reflekterade ljuset beror också på  **$n$**  och på **polariseringen** av det inkommande ljuset.

Summan av intensiteten av det **reflekterade och refrakterad** ljuset är lika med intensiteten hos det **inkommande ljuset**.



# Totalreflektion



<https://www.youtube.com/watch?v=7aU8sX8cFNs>



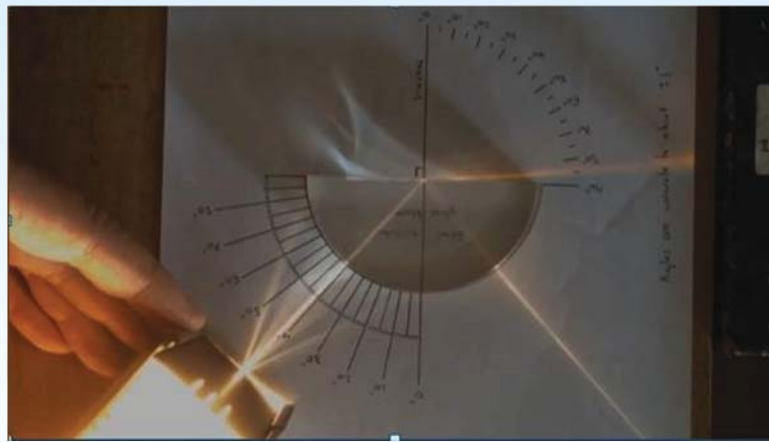
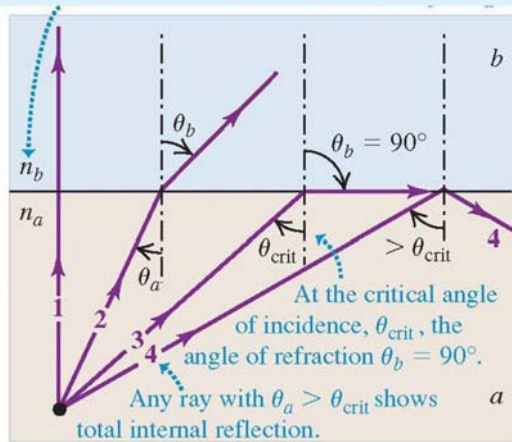


# Ljusets natur Totalreflektion



## Totalreflektion

när ljuset går till ett medium med mindre  $n$



$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b$$

$90^\circ$

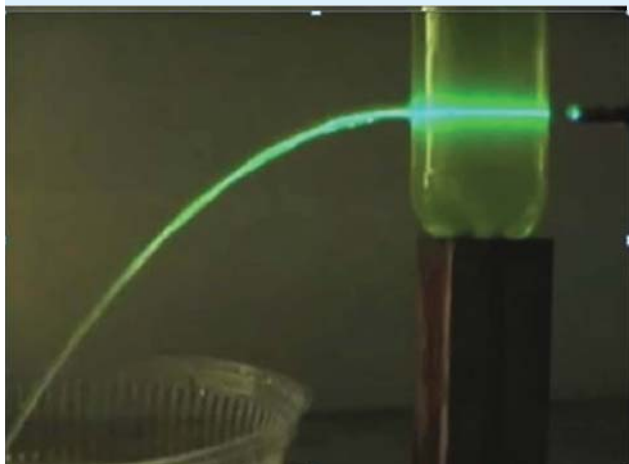
$$\sin \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a} \quad (\text{critical angle for total internal reflection})$$



# Ljusets natur Totalreflektion



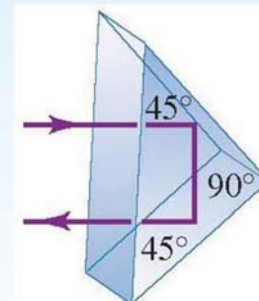
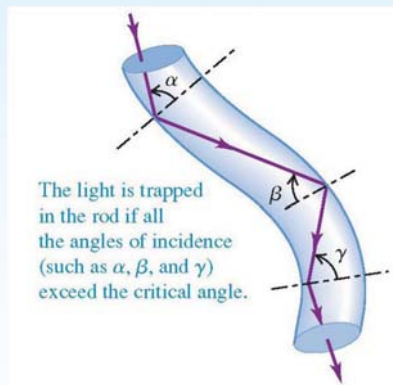
## Totalreflektion



[https://www.youtube.com/watch?v=hBQ8fh\\_Fp04](https://www.youtube.com/watch?v=hBQ8fh_Fp04)

optisk fiber

Porro prisma



$$\theta_{\text{crit}} = 41.1^\circ$$

$$\sin \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a} \quad (\text{critical angle for total internal reflection})$$

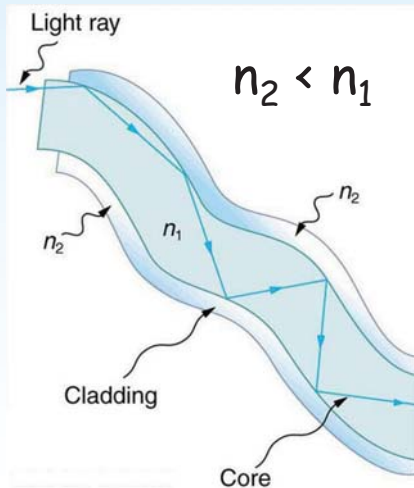


# Ljusets natur Totalreflektion

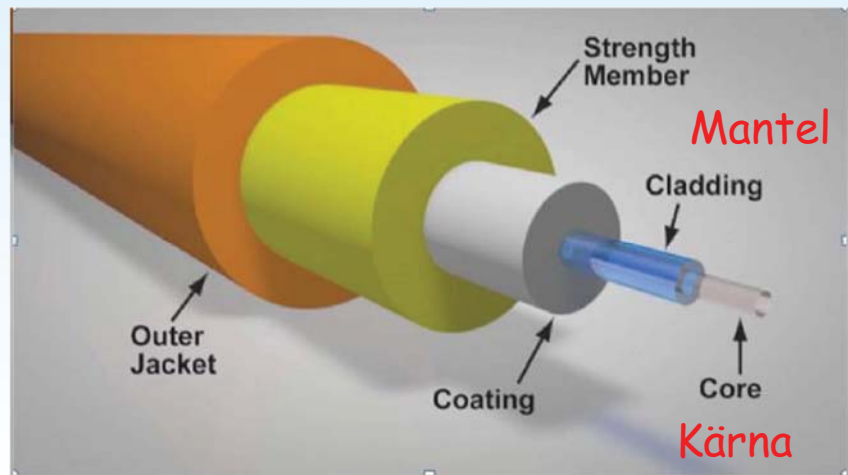


## Optiska fiber

### Princip



### Struktur



<https://www.youtube.com/watch?v=p9aC575BJcw>



# Ljusets natur Frekvens

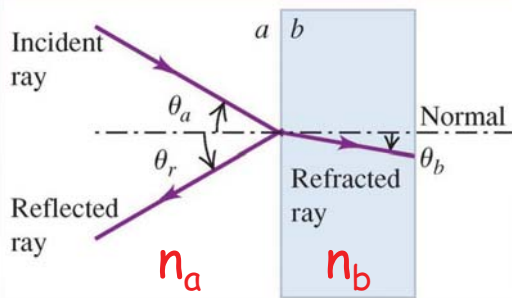


## Frekvens- och våglängdsberoende



# Ljusets natur

## Frekvens



### Frekvens och våglängd

$v = c/n$  Större  $n$  → Hastigheten lägre

$f_a = f_b$  Större  $n$  → Frekvensen oförändrad

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf}$  Större  $n$  → Våglängden kortare

$$n = \frac{c}{v} \quad (\text{index of refraction})$$

$n = 1$  i vakuum  
 $n > 1$  i ett material

$$\lambda_0 = c / f \quad n = 1$$

$$\lambda = v / f \quad n > 1$$



$$\lambda_0 / \lambda = c / v = n$$



# Ljusets natur

## Dispersion



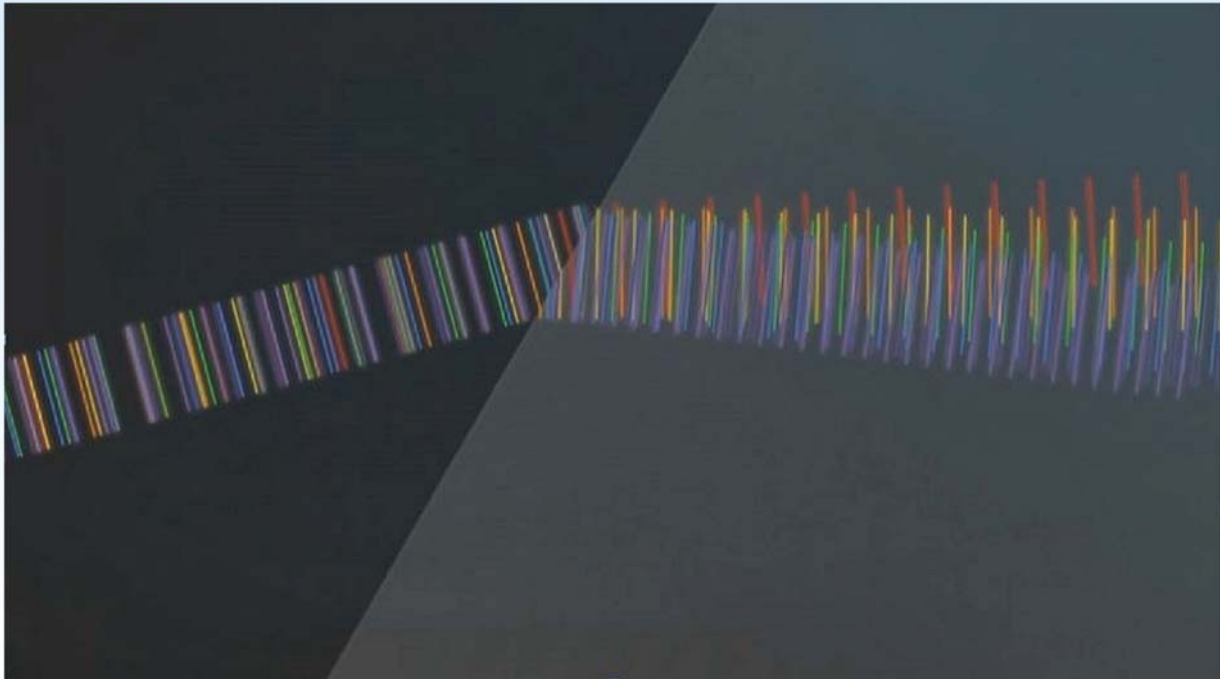
# Ljus dispersion



<https://www.youtube.com/watch?v=GNMqoInLc9Q>



# Ljusets natur Dispersion



<https://www.youtube.com/watch?v=AggiOg67uXM>



# Ljusets natur Dispersion



## Dispersion

Hur är det möjligt ?



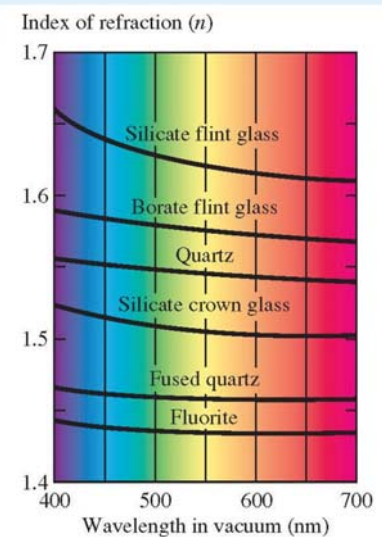
$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b \quad (\text{law of refraction})$$

Svar:  $n$  måste bero på  $\lambda$  !

men

$$n = c / v$$

så hastigheten i materialet måste  
beror på  $\lambda$



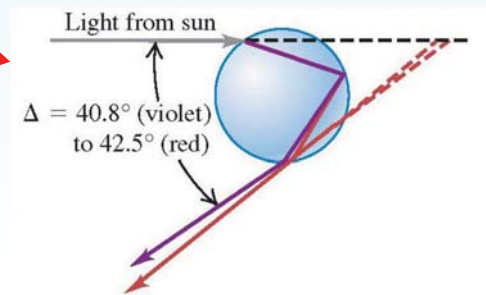
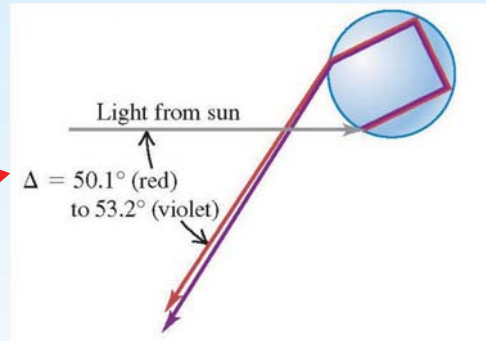




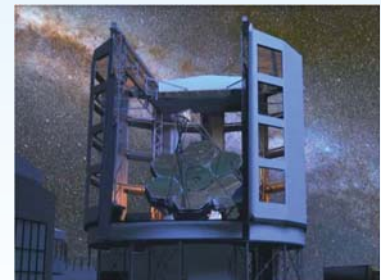
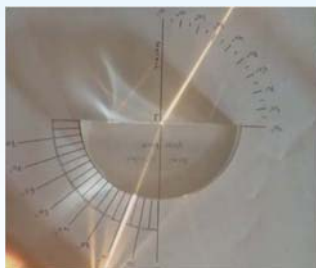
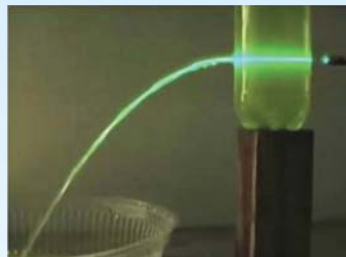
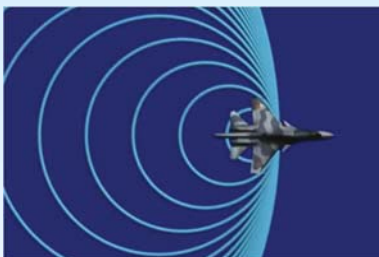
# Ljusets natur Dispersion



## Regnbåge



# Vågrörelselära och optik



## Kapitel 34 - Optik

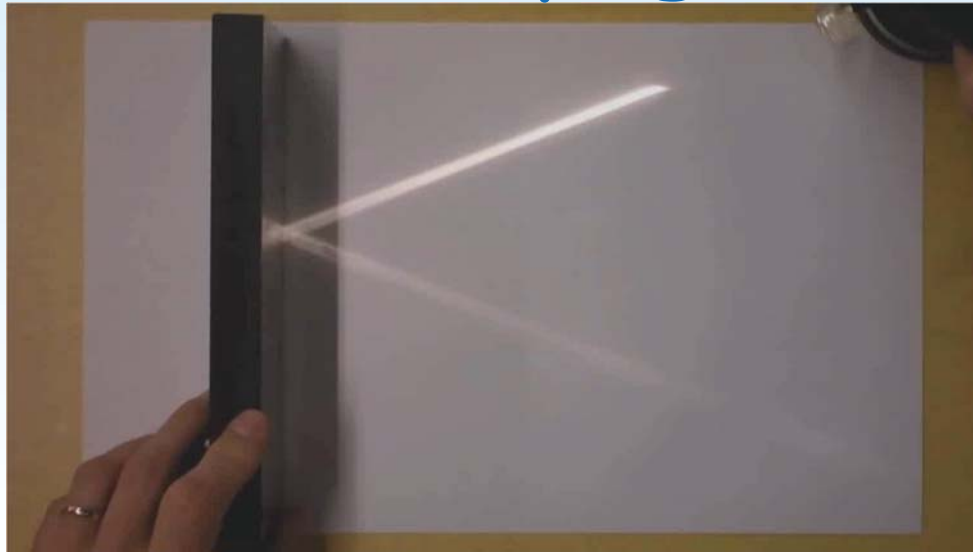




# Geometrisk optik Speglar



## Platta speglar



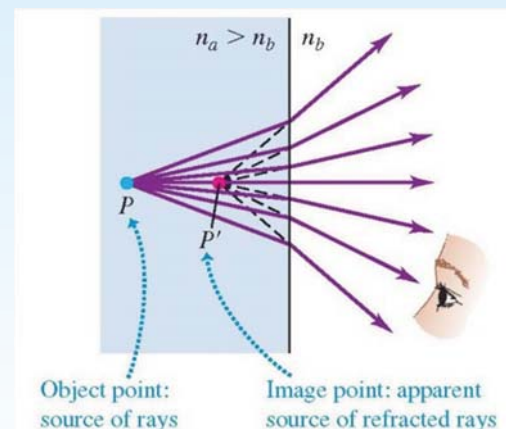
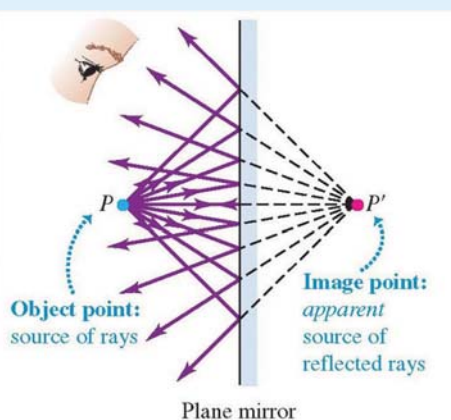
<https://www.youtube.com/watch?v=uQE659ICjqQ>



# Geometrisk optik Speglar



## Virtuella bilder: utgående strålar divergerar



## Reella Bilder: utgående strålar konvergerar till en bild som kan visas på en skärm



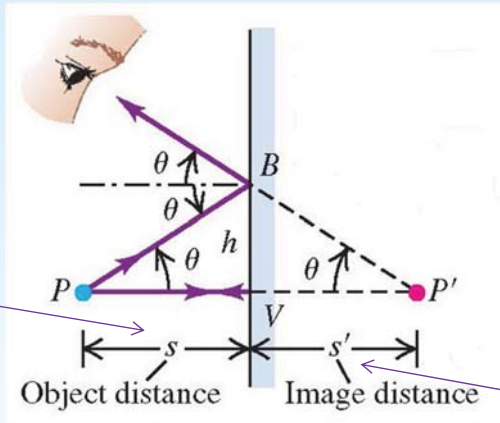
# Geometrisk optik

## Speglar



• Punkt objekt

positiv



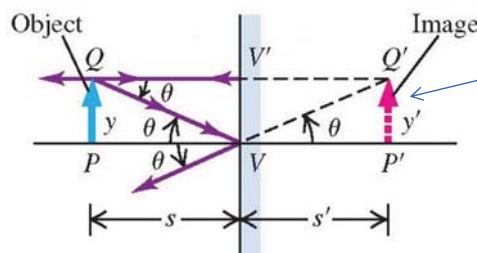
Tecken regler:

Objekt avstånd ( $s$ ) - positiv om samma sida som inkommande ljus.

Bild avstånd ( $s'$ ) - positiv om samma sida som utgående ljus.

negativ

Utsträckt objekt



Virtuell bild

$$m = \frac{y'}{y} \quad (\text{lateral magnification})$$

Formelsamling

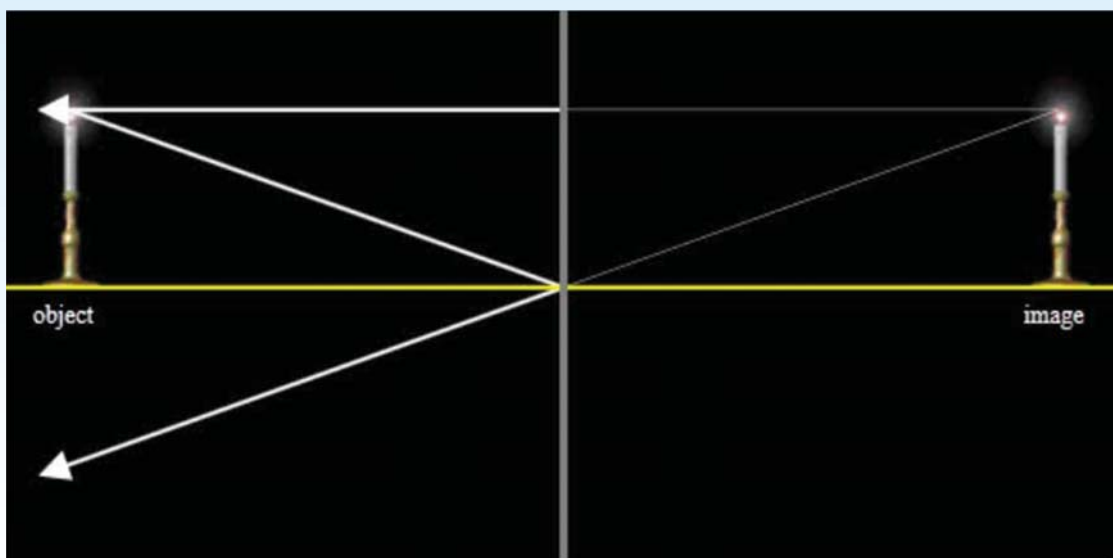


# Geometrisk optik

## Speglar



### Platt spegel





## Konkava speglar

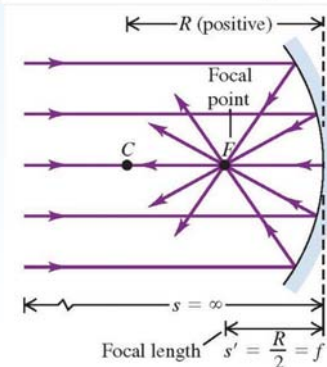
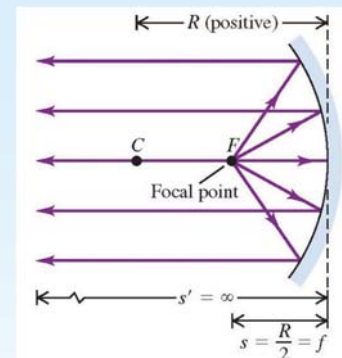


## Konkav spegel



$$f = \frac{R}{2}$$

$f$  = brännpunktsavstånd  
 $R$  = krökningsradie





# Geometrisk optik

## Speglar



### Sammanfattning sfäriska speglar

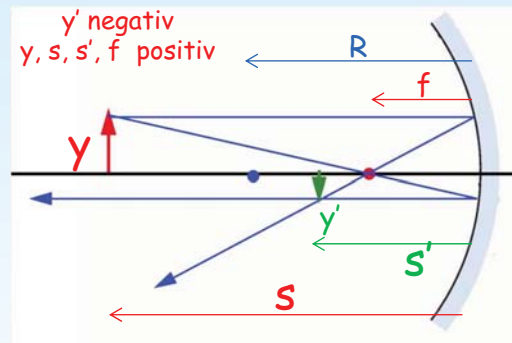
#### Tecken regler:

**Positivt objekt avstånd ( $s$ ) =**  
om objekt och inkommande ljus på  
samma sida.

**Positivt bild avstånd ( $s'$ ) =**  
om bild och utgående ljus på samma sida.

**Positiv krökningradie ( $R$ ) =**  
om center på samma sida som utgående ljus.

**Positiv förstoring ( $m$ ) =**  
om samma riktningen av objekt och bild.



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{R}{2}$$

Formelsamling

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$



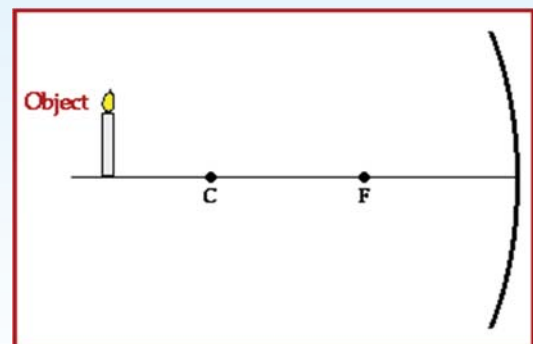
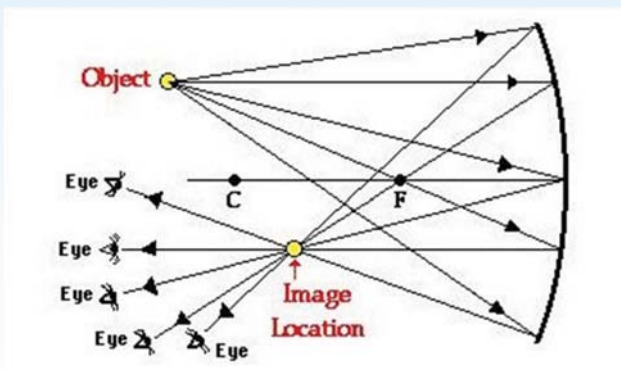
# Geometrisk optik

## Speglar



Ett oändligt antal strålar kan dras  
från ett objekt till sin bild.

Men endast två strålar behövs  
för att bestämma läget för  
bilden.





# Geometrisk optik

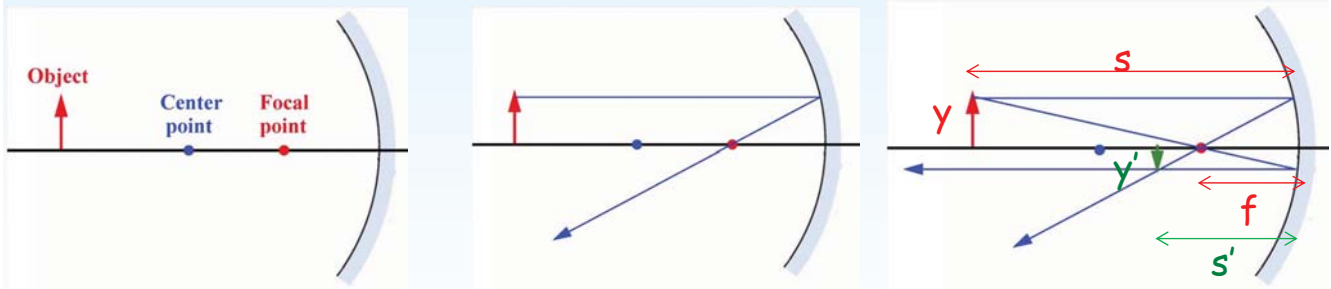
## Speglar



### Hur man hittar bilden i en konkav spegel

Botten av objektet är på den optiska axeln och så botten av bilden kommer också att vara på den optiska axeln.

Den övre delen av bilden kan hittas med vilka två strålar som helst. Använd till exempel två strålar som går genom brännpunkten.



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

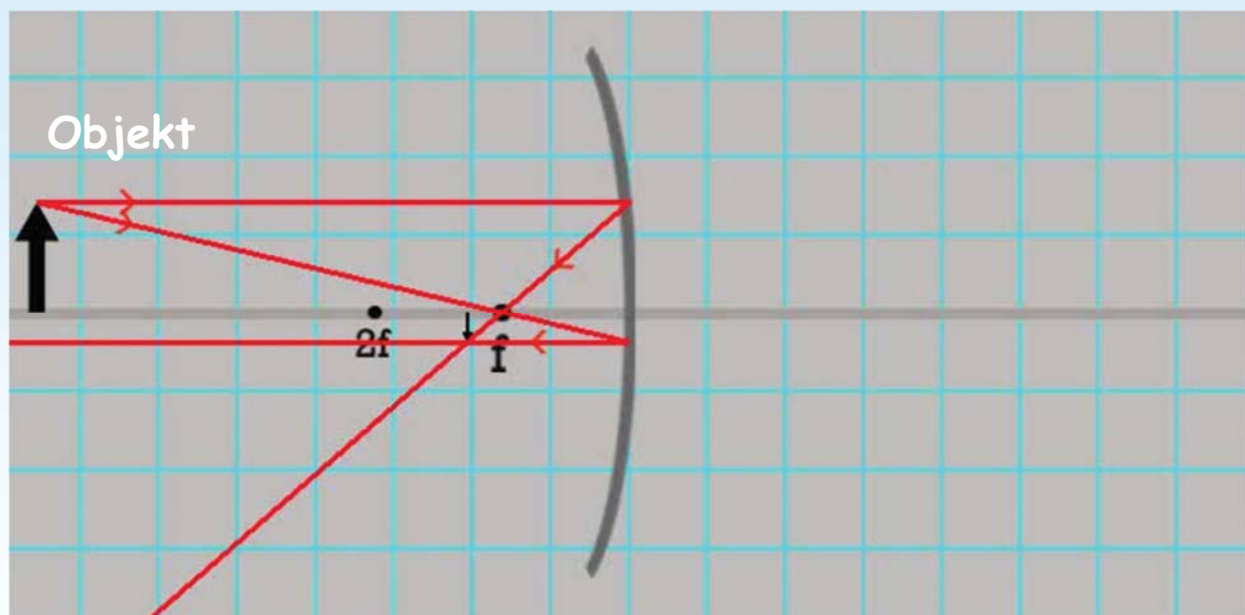
$$f = \frac{R}{2}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$



# Geometrisk optik

## Speglar







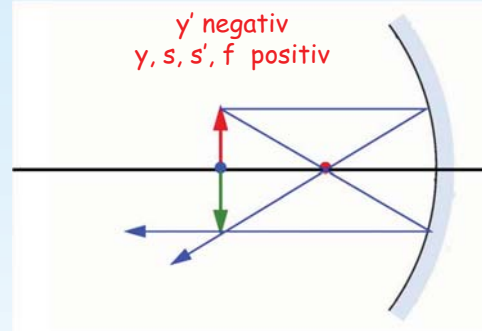
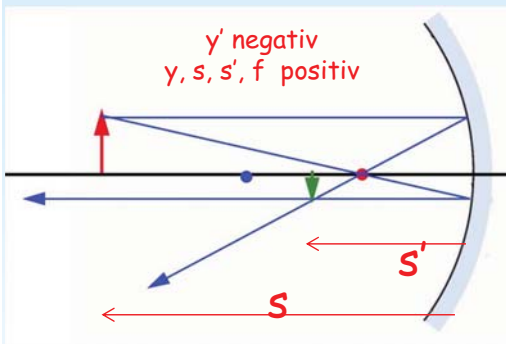
# Geometrisk optik Speglar



## Konkava speglar kan ge reella bilder

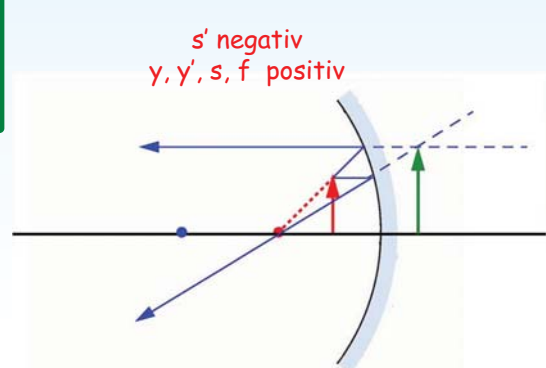
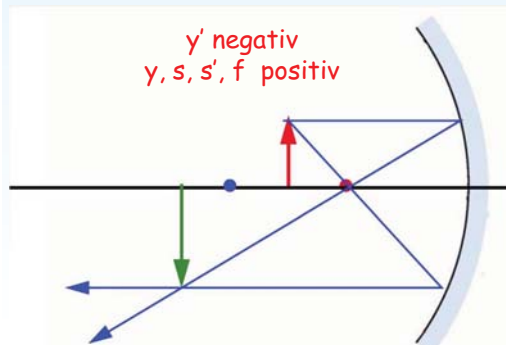


# Geometrisk optik Speglar



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$





# Geometrisk optik Speglar



## Konvexa speglar



Vincent Hedberg - Lunds Universitet

149



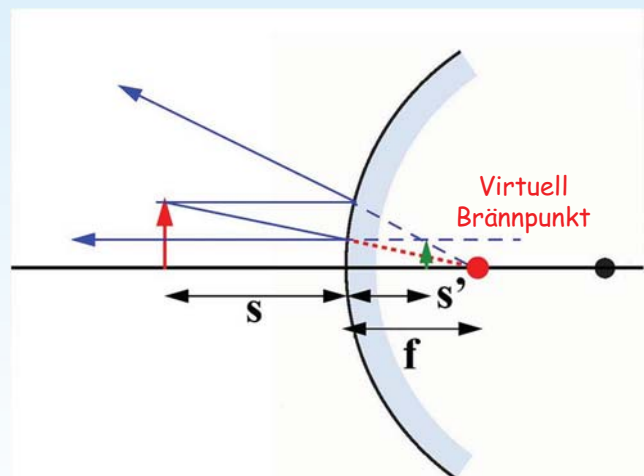
# Geometrisk optik Speglar



## Konvexa speglar



[https://www.youtube.com/watch?v=J6LQM6re\\_1s](https://www.youtube.com/watch?v=J6LQM6re_1s)



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$s', f$  negativ  
 $y, y', s$  positiv

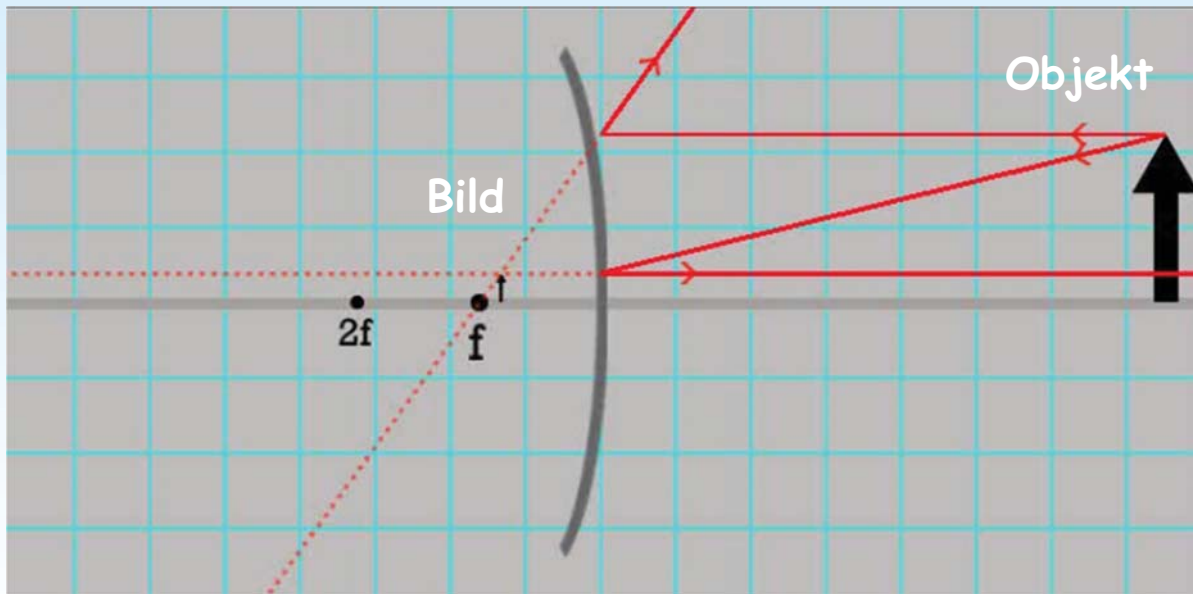
Vincent Hedberg - Lunds Universitet

150



# Geometrisk optik

## Speglar



<http://simbucket.com/lensesandmirrors/>

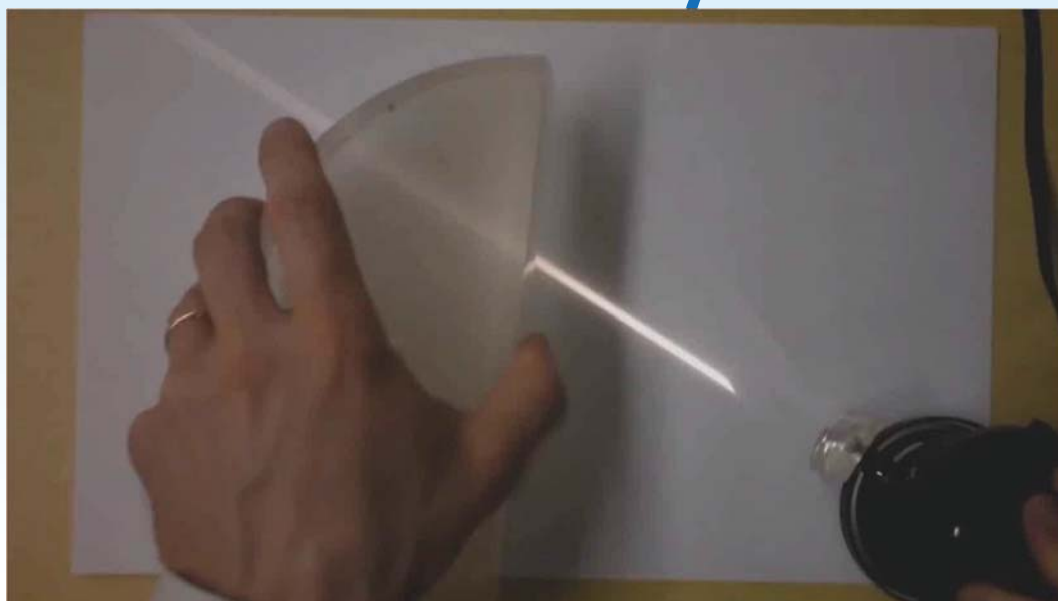


# Geometrisk optik

## Sfäriska ytor



# Sfäriska ytor



<https://www.youtube.com/watch?v=uQE659ICjqQ>



# Geometrisk optik

## Sfäriska ytor



### Sammanfattning - Sfäriska ytor

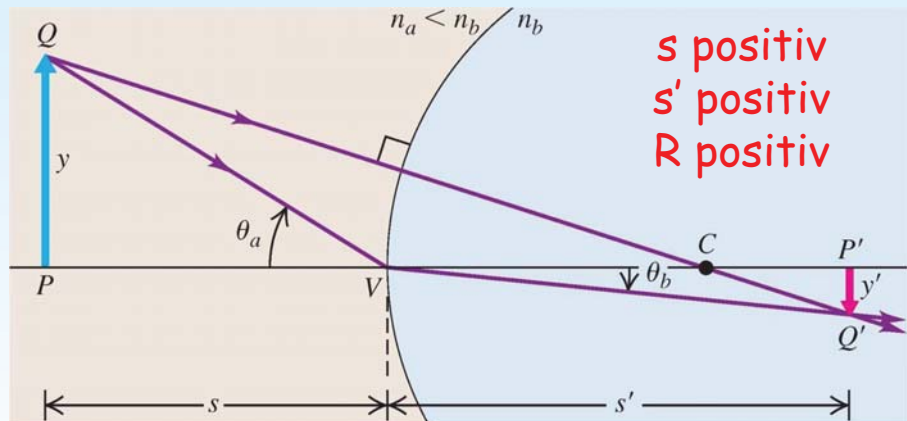
Tecken regler:

**Positivt objekt avstånd ( $s$ )**  
objekt och inkommande  
ljus på samma sida.

**Positivt bild avstånd ( $s'$ )**  
bild och utgående ljus på  
samma sida.

**Positiv krökningradie ( $R$ )**  
center på samma sida som  
utgående ljus.

**Positiv förstoring ( $m$ )**  
samma riktningen av  
objekt och bild.



**$s$  positiv**  
 **$s'$  positiv**  
 **$R$  positiv**

Formelsamling

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s}$$



# Geometrisk optik

## Platta ytor



### Platta ytor



<https://www.youtube.com/watch?v=7aU8sX8cFNs>



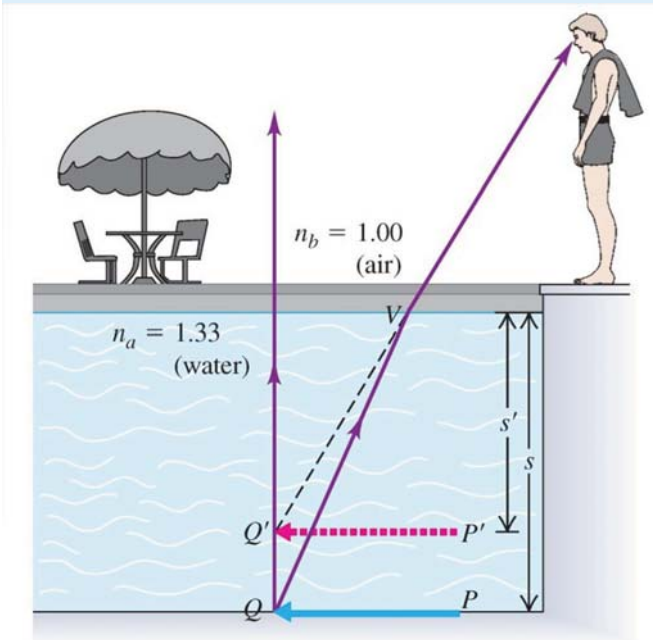


# Geometrisk optik

## Platta ytor



### Special fall: Platt yta



$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} = 0$$

$\infty$



$$n_a/s = -n_b/s'$$

$$-s'/s = n_b/n_a$$

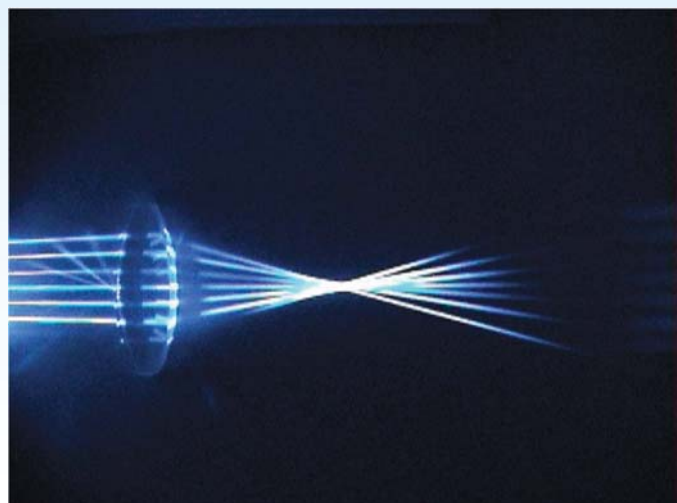


# Geometrisk optik

## Linser



### Konvexa linser







# Geometrisk optik

## Linser

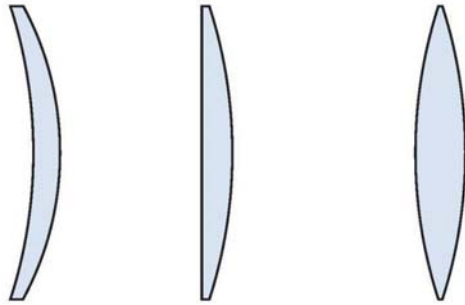


### Olika typer av linser

En lins som är tjockare i mitten än i kanterna är konvergent.

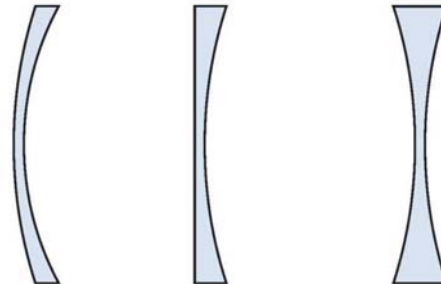
En lins som är tunnare i mitten än i kanterna är divergerande.

#### Converging lenses



Meniscus    Planoconvex    Double convex

#### Diverging lenses

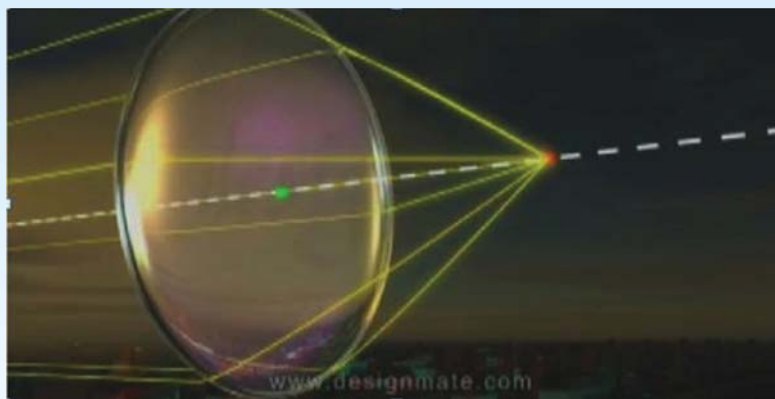


Meniscus    Planoconcave    Double concave

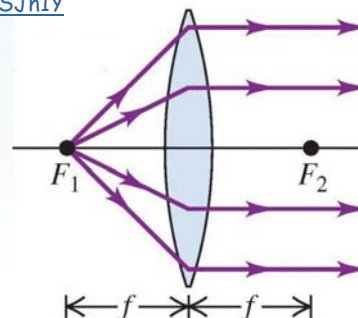
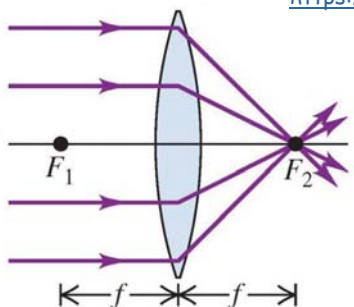


# Geometrisk optik

## Linser



[https://www.youtube.com/watch?v=4zuB\\_dSJn1Y](https://www.youtube.com/watch?v=4zuB_dSJn1Y)

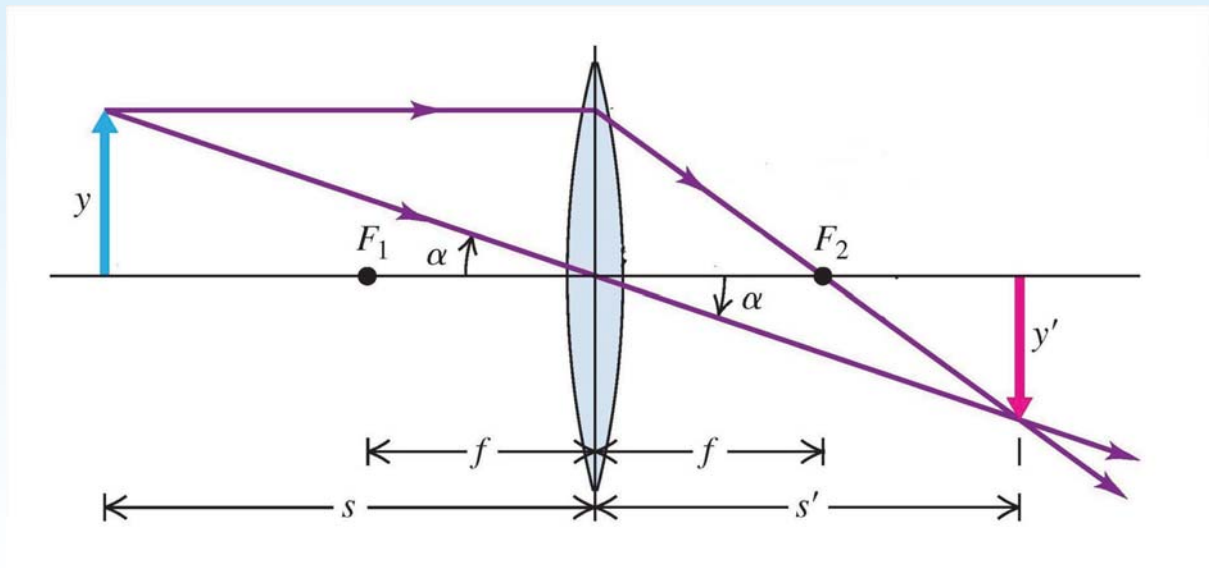




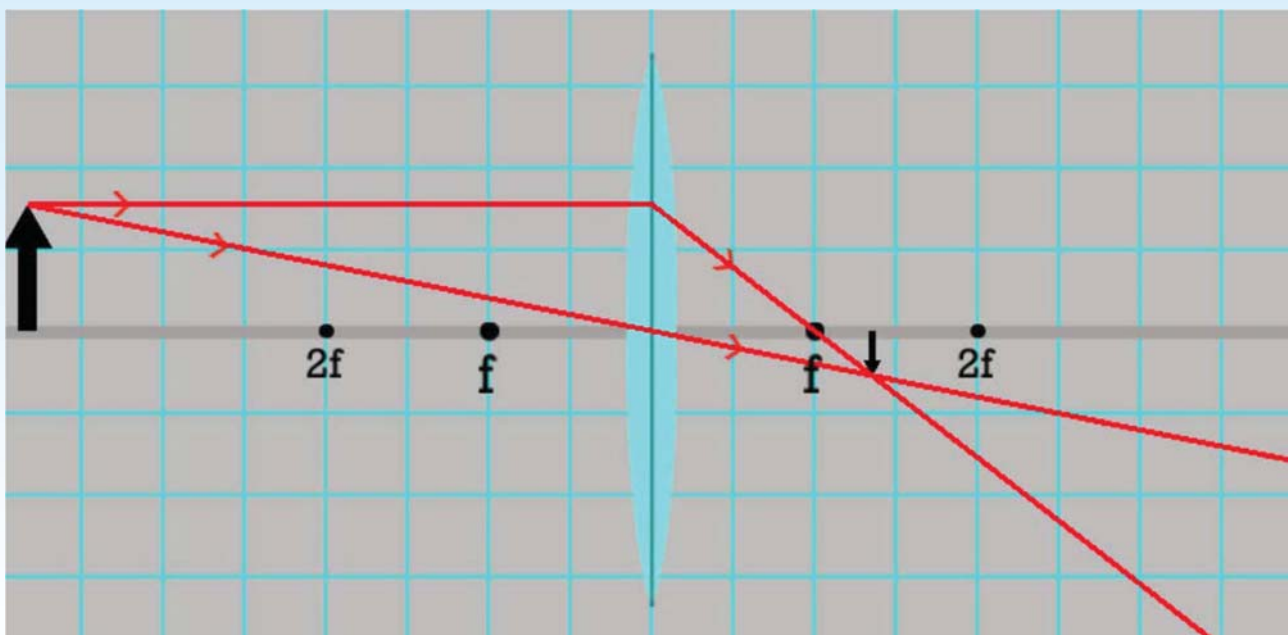
# Geometrisk optik Linser



## Två användbara strålar



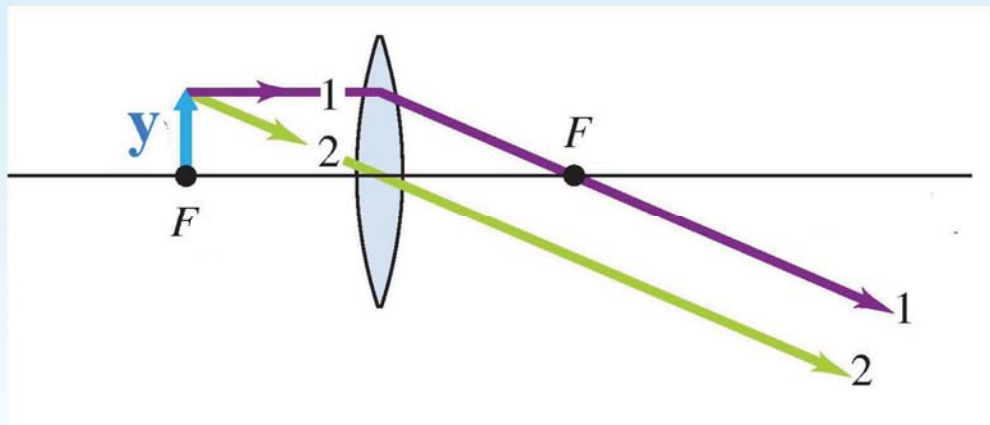
# Geometrisk optik Linser





# Geometrisk optik

## Linser



Ett föremål placerat vid brännpunkten verkar vara oändligt långt borta



# Geometrisk optik

## Linser



### Tecken regler:

**Positivt objekt avstånd ( $s$ )**  
objekt och inkommande ljus på samma sida.

**Positivt bild avstånd ( $s'$ )**  
bild och utgående ljus på samma sida.

**Positivt brännpunktsavstånd ( $f$ )**  
Konvergerande (konvexa) linser

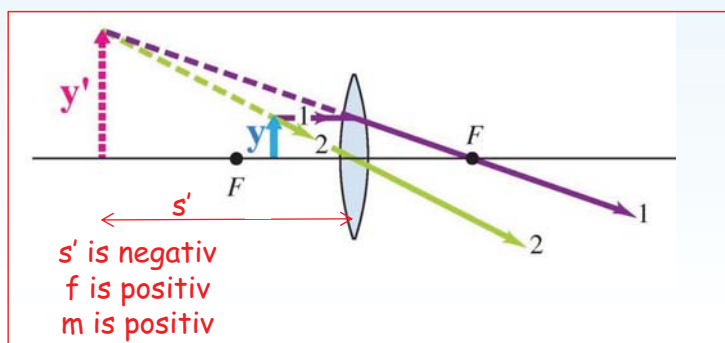
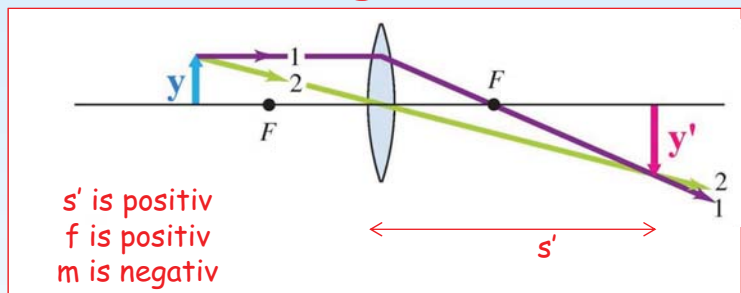
**Positiv förstoring ( $m$ )**  
samma riktningen av objekt och bild.

### Formelsamling

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

### Sammanfattning konvexa linser





# Geometrisk optik Linser



## Gauss formel

## Newtons formel

Formelsamling

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

$$f = \frac{s s'}{s + s'}$$

$$s = \frac{s' f}{s' - f}$$

$$s' = \frac{s f}{s - f}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

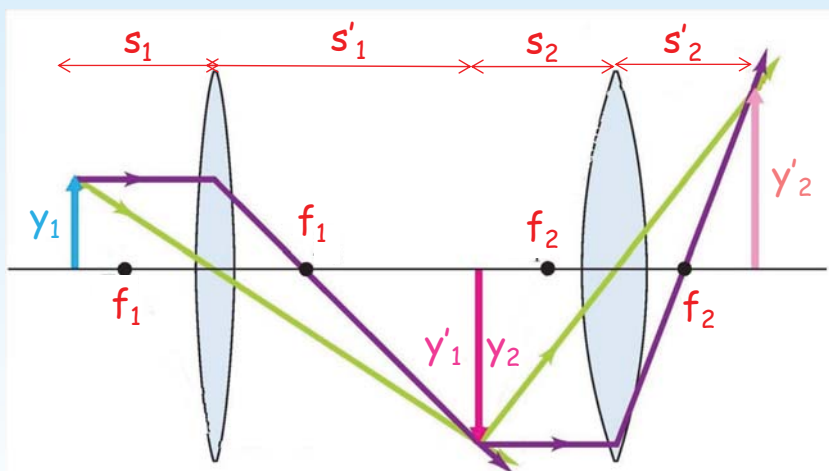
$$m = -\frac{f}{s - f}$$



# Geometrisk optik Linser



## Kombinera två linser



$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1}$$

$$m_1 = -\frac{s'_1}{s_1}$$

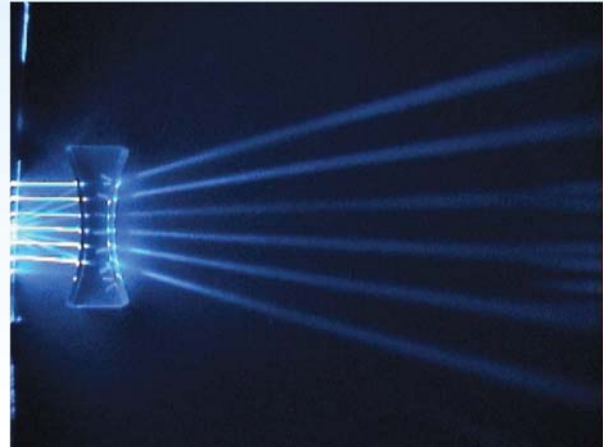
$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2}$$

$$m_2 = -\frac{s'_2}{s_2}$$

$$\Rightarrow m = m_1 m_2 = \frac{s'_1 s'_2}{s_1 s_2}$$



## Konkava linser

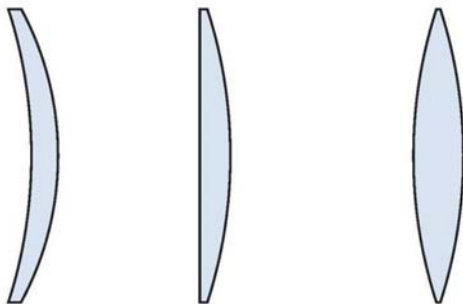


## Olika typer av linser

En lins som är tjockare i mitten än i kanterna är konvergent.

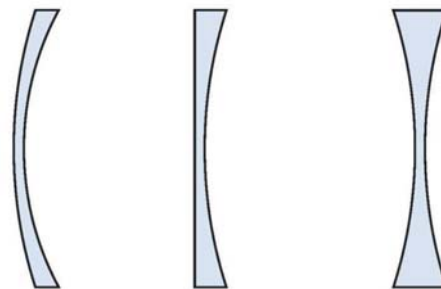
En lins som är tunnare i mitten än i kanterna är divergerande.

### Converging lenses



Meniscus    Planoconvex    Double convex

### Diverging lenses



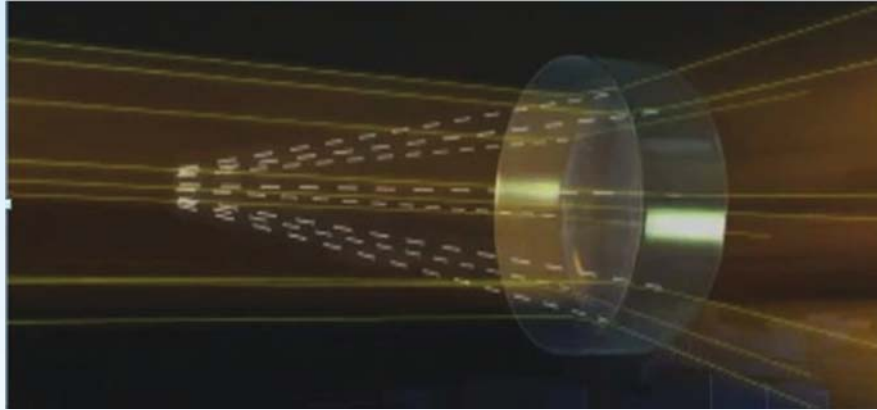
Meniscus    Planoconcave    Double concave



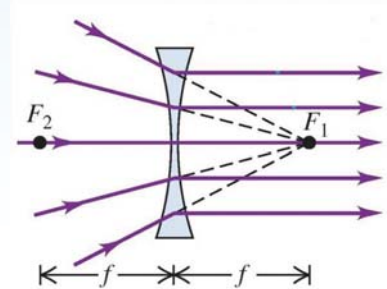
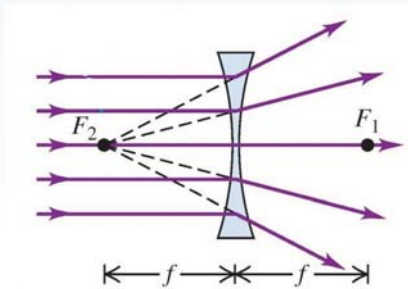




# Geometrisk optik Linser



[https://www.youtube.com/watch?v=4zuB\\_dSJn1Y](https://www.youtube.com/watch?v=4zuB_dSJn1Y)

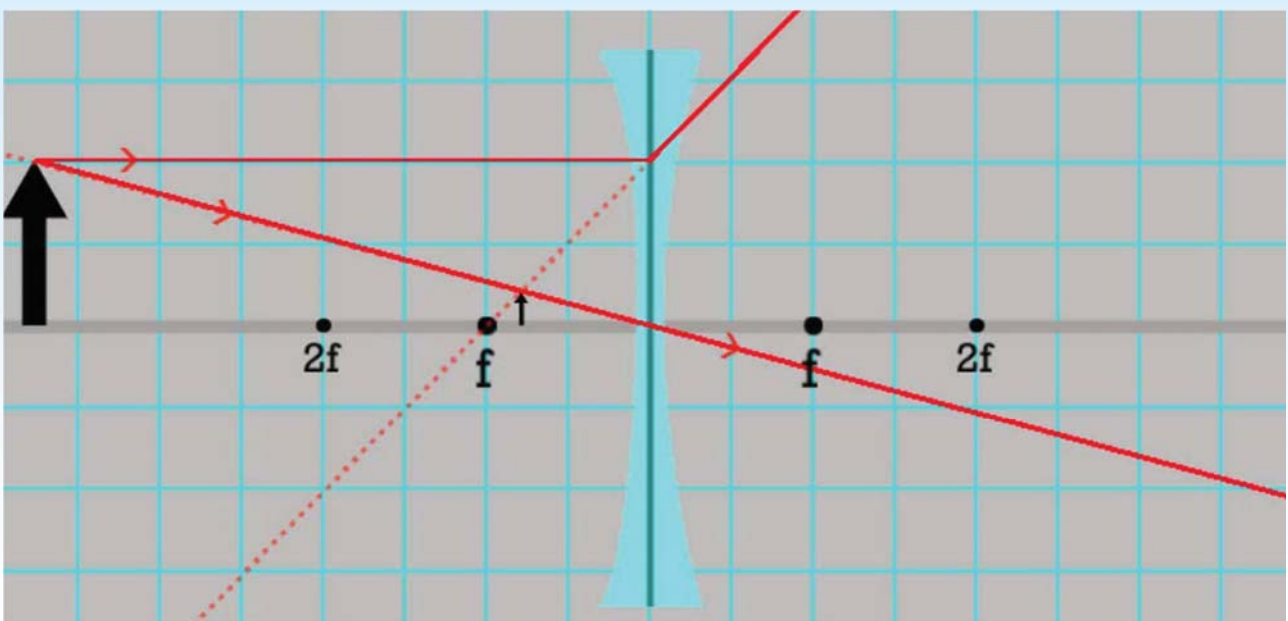


Vincent Hedberg - Lunds Universitet

167



# Geometrisk optik Linser



<http://simbucket.com/lensesandmirrors/>

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

168

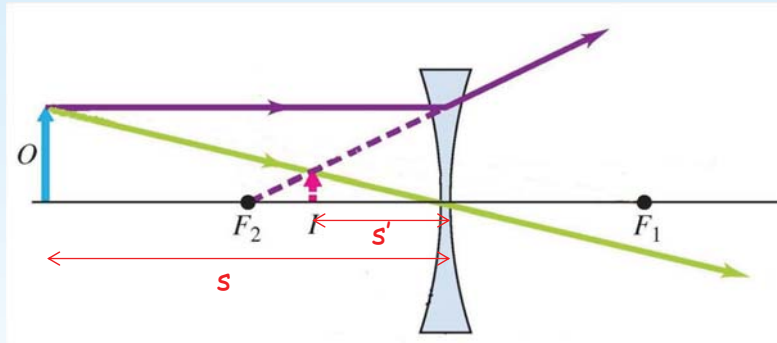


# Geometrisk optik

## Linser



### Lins formeln för konkava linser



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$f$  är negativ för divergerande linser

$s'$  är negativ för divergerande linser

$$m = -\frac{s'}{s}$$

$m$  är positiv



# Geometrisk optik

## Linser



# Linsmakarens formel





# Geometrisk optik

## Linser

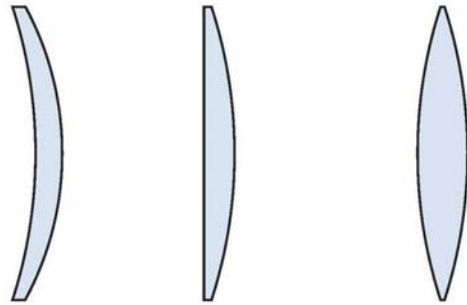


### Olika typer av linser

En lins som är tjockare i mitten än i kanterna är konvergent (f är positivt)

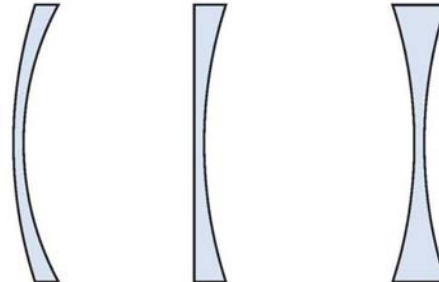
En lins som är tunnare i mitten än i kanterna är divergerande (f är negativt)

#### Converging lenses



Meniscus    Planoconvex    Double convex

#### Diverging lenses

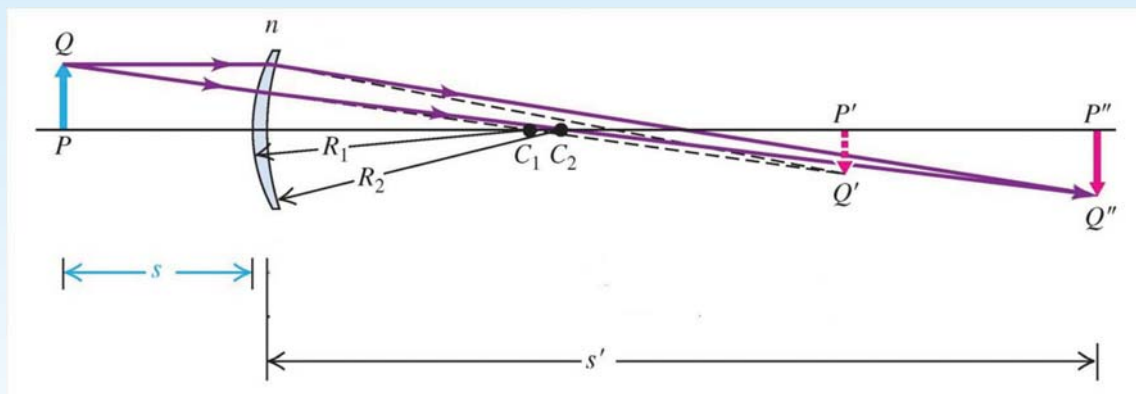


Meniscus    Planoconcave    Double concave



# Geometrisk optik

## Linser



Linsmakarens ekvation

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Formelsamling



# Geometrisk optik

## Linser



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$m = -\frac{s'}{s}$$

$$m = \frac{y'}{y}$$

Tecken regel för krökningsradie - R är positiv om centrum är på sidan med utgående ljus.



$f = \text{positiv}$        $R_1 = \text{positiv}$        $R_2 = \text{positiv}$        $s' = \text{positiv eller negativ}$



$f = \text{positiv}$        $R_1 = \text{positiv}$        $R_2 = \text{negativ}$        $s' = \text{positiv eller negativ}$



$f = \text{negativ}$        $R_1 = \text{negativ}$        $R_2 = \text{positiv}$        $s' = \text{negativ}$

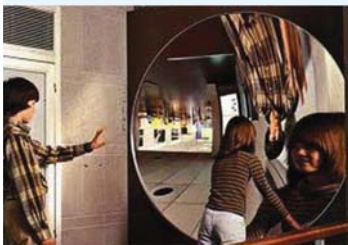


# Geometrisk optik

## Sammanfattning



# Sammanfattning



Konkav  
spegel



Konvex  
spegel



Sfärisk  
yta



Konvex  
lins



Konkav  
lins





# Geometrisk optik Sammanfattning



## Formler

### Formelsamling

Konkav  
spegel

Konvex  
spegel

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$f = \frac{R}{2}$$

Sfärisk  
yta

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s}$$

Konvex  
lins

Konkav  
lins

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



# Geometrisk optik Sammanfattning



### Tecken regler speglar:

**Positivt objekt avstånd (s)**  
om objekt och inkommande ljus  
på samma sida.

**Positivt bild avstånd (s')**  
om bild och utgående ljus  
på samma sida.

**Positiv krökningradie (R)**  
om center på samma sida  
som utgående ljus.

**Positiv förstoring (m)**  
om samma riktningen  
av objekt och bild.

### Tecken regler linser:

**Positivt objekt avstånd (s)**  
om objekt och inkommande ljus  
på samma sida.

**Positivt bild avstånd (s')**  
om bild och utgående ljus  
på samma sida.

**Positivt brännpunktsavstånd (f)**  
Konvergerande (konvexa) linser

**Positiv förstoring (m)**  
om samma riktningen  
av objekt och bild.



# Geometrisk optik

## Ögat



# Ögat



# Geometrisk optik

## Ögat

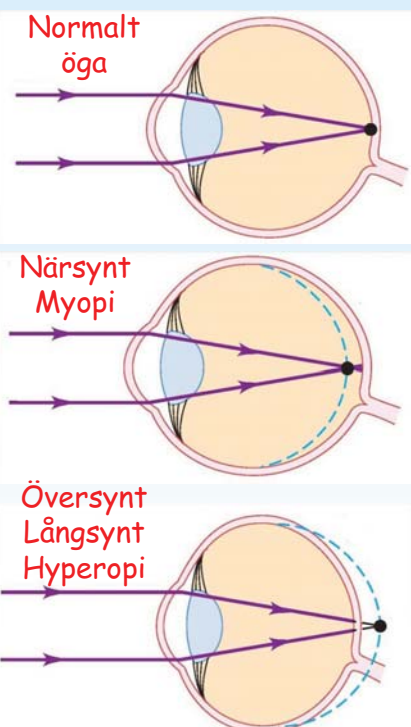


**När punkten:** kortaste avståndet till ögat vid vilken människor kan se klart (från 7cm vid 10 års ålder till 40 cm vid 50 års ålder för normalt ögat).

**Normalt läsavstånd:** antas vara 25 cm när man utformar korrektionslinsar.

**Fjärr punkten:** Längsta avståndet till ögat vid vilken människor kan se klart.

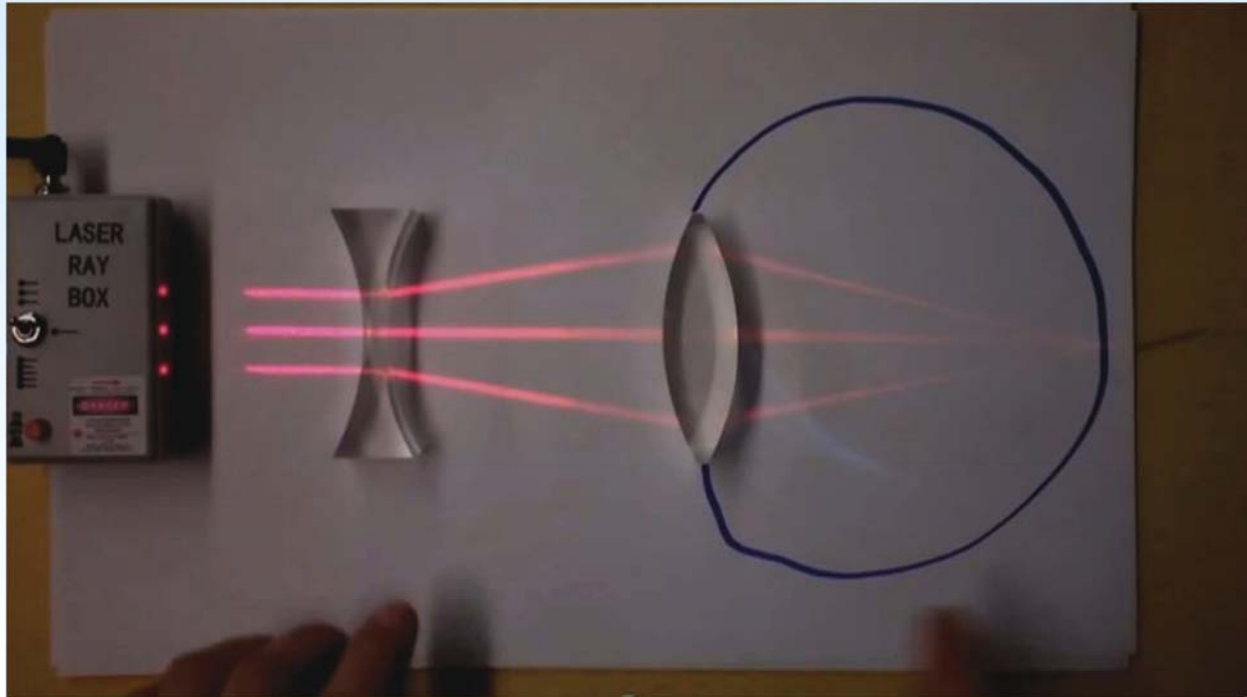
Linsar för korrigeringar anges i dioptrier:  
**Lins styrka =  $1/f$**  (enhet: dioptrier =  $m^{-1}$ )





# Geometrisk optik

## Ögat



[https://www.youtube.com/watch?v=VDehC\\_Txa1U](https://www.youtube.com/watch?v=VDehC_Txa1U)

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

179



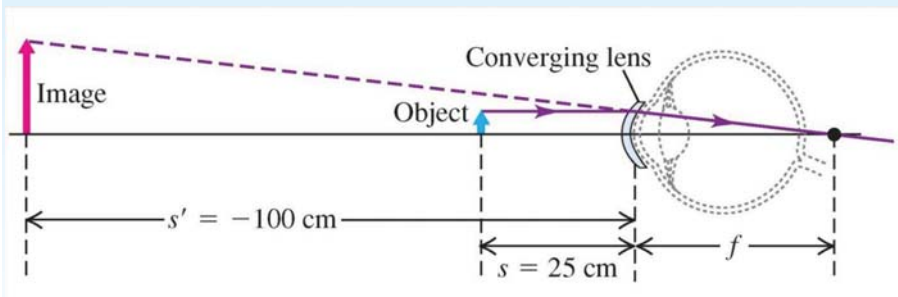
# Geometrisk optik

## Problem



Ett översynt öga har närpunkten på ett avstånd av 100 cm.

Vilken linsstyrka behövs för att närpunkten ska flyttas till 25 cm ?



Med ett föremål på  $s = 25$  cm från korrektionslinsen vill vi att bilden ska hamna vid  $s' = 100$  cm för det är den närmsta punkten ögat kan se skarpt.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{+25 \text{ cm}} + \frac{1}{-100 \text{ cm}}$$

$$f = +33 \text{ cm}$$

Lins styrka =  $1/f = 1/0.33 \text{ m}^{-1} = 3$  dioptrier

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

180

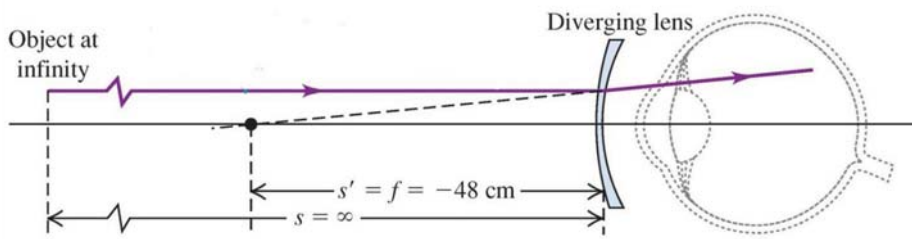


# Geometrisk optik Problem



Ett närsynt öga har fjärrpunkten på ett avstånd av 50 cm.

Vilken linsstyrka behövs för att korrigera ögat om linsen sitter 2 cm framför ögat?



Linsen ska flytta fjärrpunkten från 50 cm till oändligt långt bort. Korrektionslinsen ska därför ha  $s = \infty$  och  $s' = 50 - 2 = 48$  cm.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-48 \text{ cm}}$$

$$f = -48 \text{ cm}$$

OBS

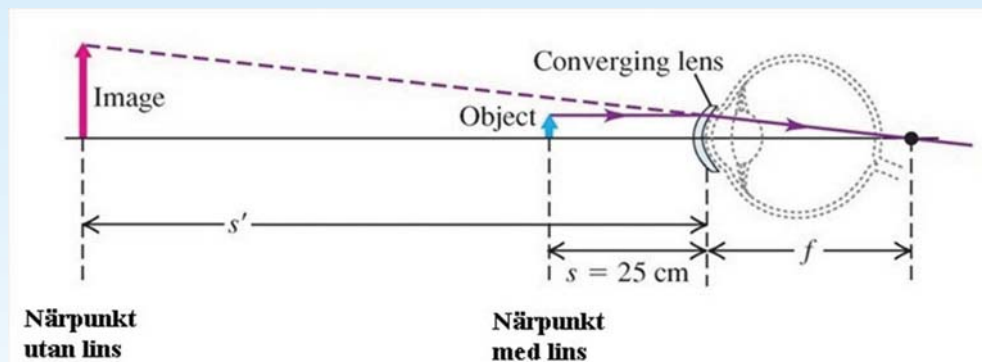
Lins styrka =  $1/f = -1/0.48 \text{ m}^{-1} = -2.1$  dioptrier



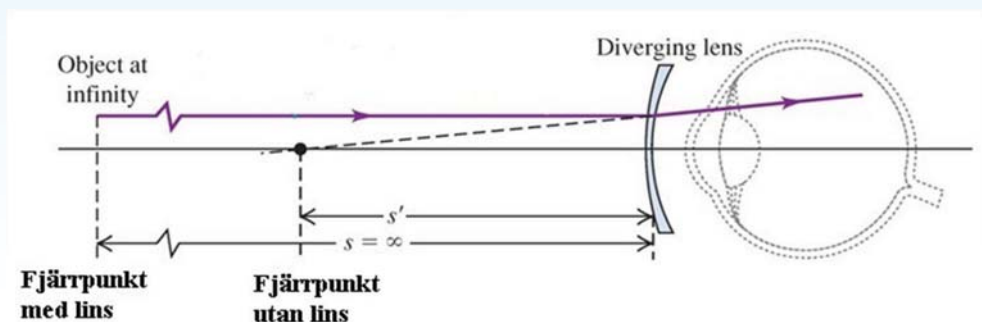
# Geometrisk optik Sammanfattning



Översynt



Närsynt





# Geometrisk optik Kameran



## Kameran



# Geometrisk optik Kameran



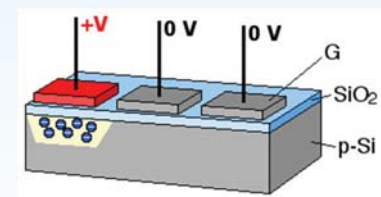
De två viktigaste uppgifterna för en kamera:

1. Fokusering av bilden på bildsensorn (CCD)
2. Lagom exponering (rätt mängd ljus på bildsensorn)

### CCD Charge Coupled Device

I varje pixel omvandlas rött, grönt och blått ljus till elektroner.

Elektronerna leds ut till kanterna av sensorn.



Elektronernas laddning omvandlas sedan till ett digitalt värde.





# Geometrisk optik

## Kameran



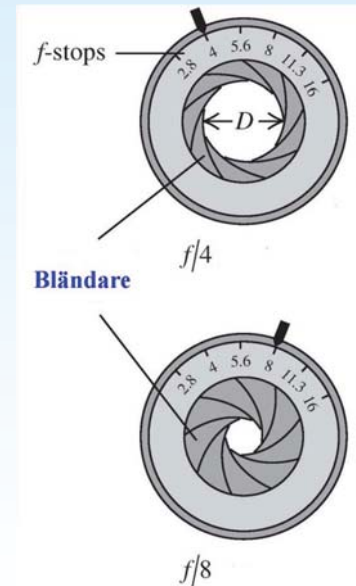
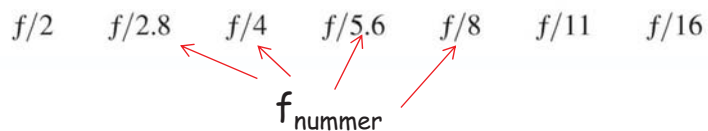
### Exponering: Ljusenergi per ytenhet som träffar CCD

Exponeringen beror på slutartiden och bländaren.

Långa slutartider leder till problem om objektet rör sig.

Öppningen styrs av bländaren som kan ändra sin diameter (D).

$$f_{\text{nummer}} = f / D \quad \text{Exponering} \sim 1 / f_{\text{nummer}}^2$$



Litet  $f_{\text{nummer}}$  = Stor D



# Geometrisk optik

## Förstoringsglas



# Förstoringsglas



<https://www.youtube.com/watch?v=CIXemjuLMGg>

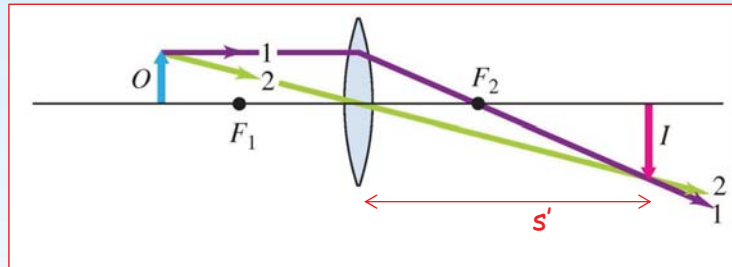


# Geometrisk optik Förstoringsglas

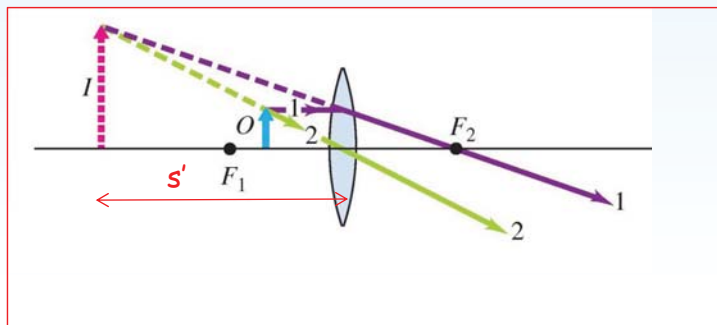


Ett förstoringsglas är en konvex lens.

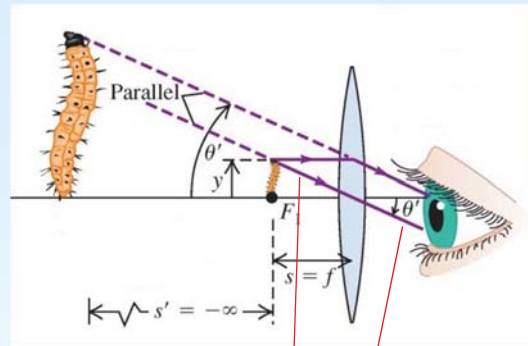
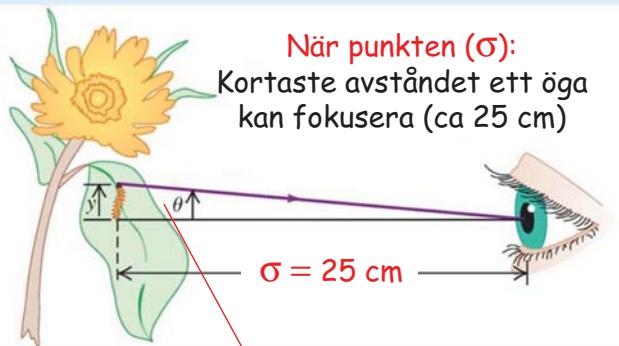
Håller man ett förstoringsglas långt borta från ögat (armlängds avstånd) kan man se en förstorad och upp och ner vänd bild.



Normal användning av ett förstoringsglas är att sätta objektet mellan brännpunkten och glaset för att få en förstorad upprätt bild.



# Geometrisk optik Förstoringsglas



Maximal vinkel utan förstoringsglas

$$\tan(\theta) \approx \theta = \frac{y}{\sigma} \approx \frac{y}{25 \text{ cm}}$$

Maximal vinkel med förstoringsglas

$$\tan(\theta') \approx \theta' = \frac{y}{f}$$

När objektet är i brännpunkten använder man vinkel förstoring (M) i stället för lateral förstoring (m).

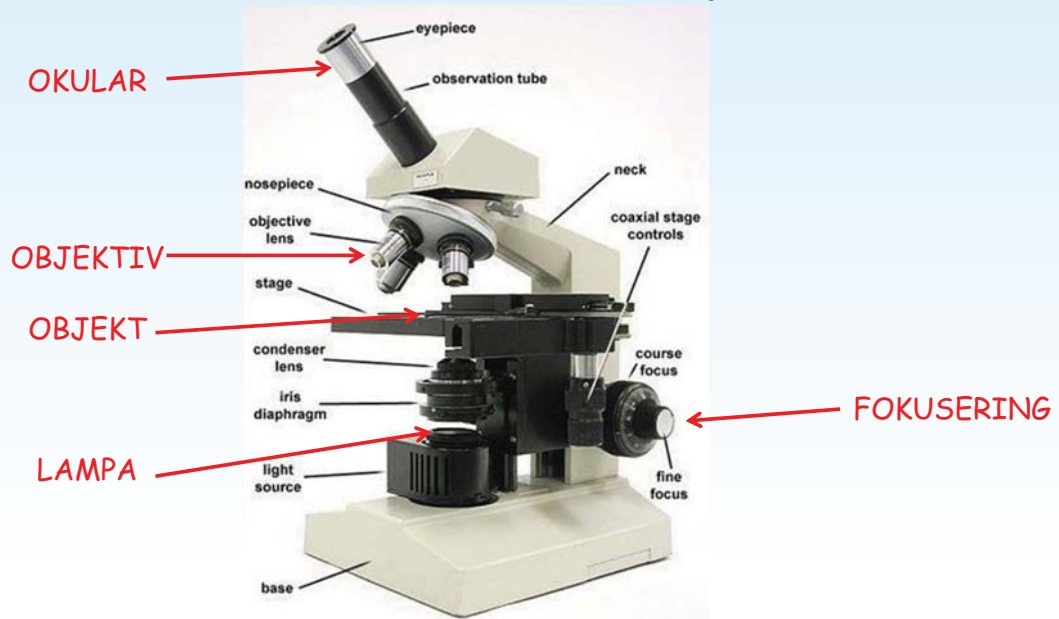
$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{y/f}{y/\sigma} = \frac{\sigma}{f} = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$



# Geometrisk optik Mikroskop



## Mikroskop

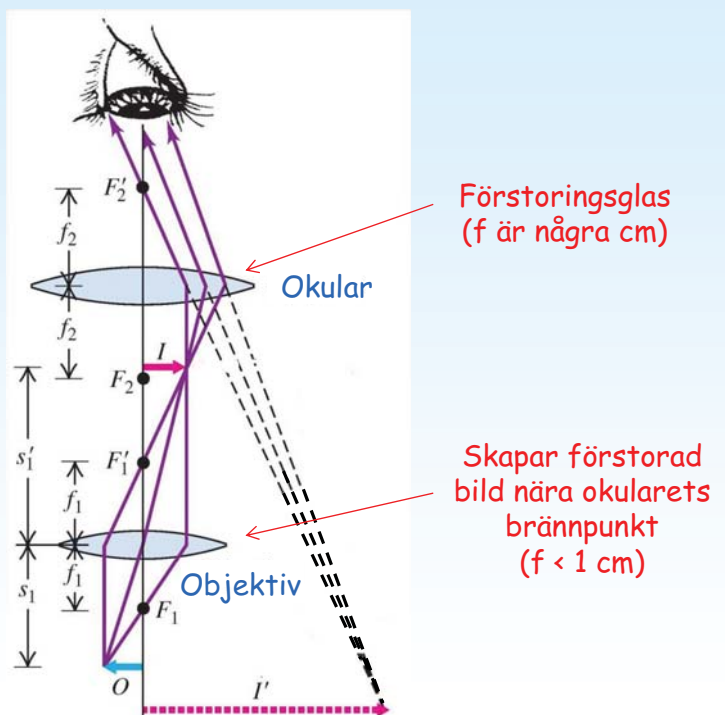
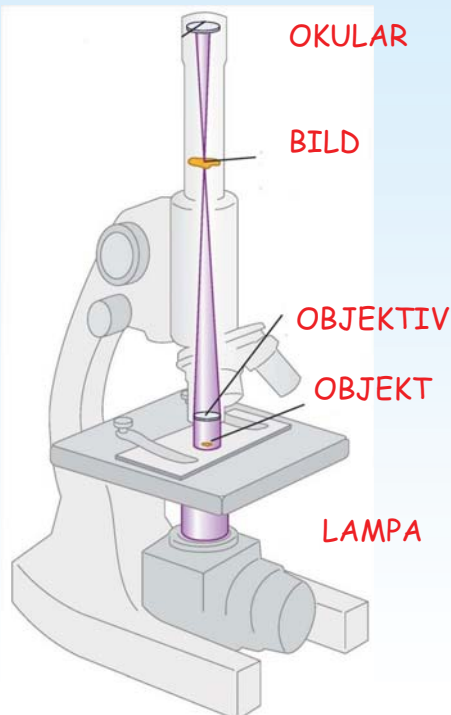


Vincent Hedberg - Lunds Universitet

189



# Geometrisk optik Mikroskop



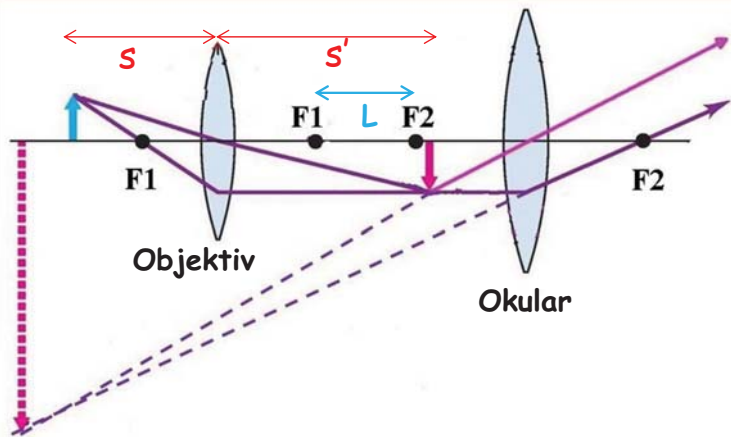
Vincent Hedberg - Lunds Universitet

190



# Geometrisk optik

## Mikroskop



**OKULAR**

Vinkel förstoringen av ett förstoringsglas:

$$M = \frac{\sigma}{f} \quad \text{where } \sigma = 25 \text{ cm}$$

**OBJEKTIV**

$s' \approx f + L$

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{s' - f}{f} \approx -\frac{f + L - f}{f} = -\frac{L}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \Rightarrow s = \frac{s'f}{s' - f}$$

**MIKROSKOP**

Förstoring:

$$M = m_1 M_2 = -\frac{s'_1 \sigma}{s_1 f_2} = -\frac{L \sigma}{f_1 f_2}$$

$\sigma$  är närpunkts avståndet vilket är typiskt 25 cm



# Geometrisk optik

## Teleskop



# Teleskop

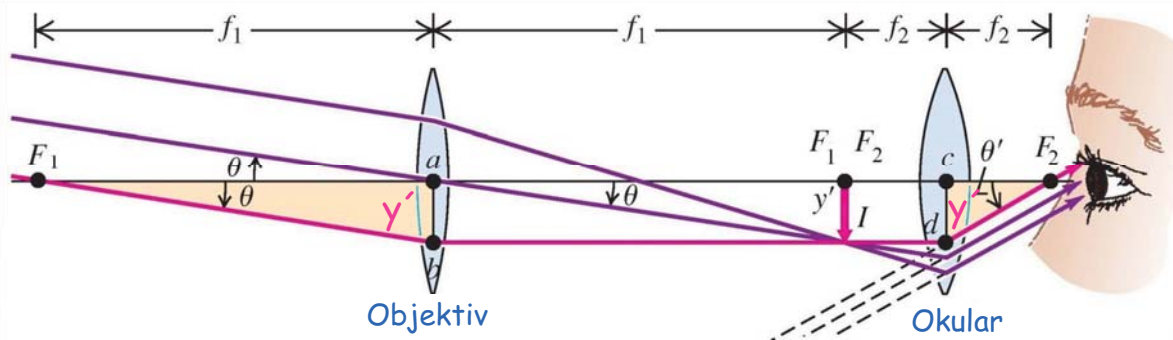






# Geometrisk optik

## Teleskop



Föremålet är oändligt långt borta så bilden kommer att vara i brännpunkten av objektivet.

$$\tan(\theta) = \theta = \frac{-y'}{f_1}$$

Okularet fungerar som ett förstöringsglas med bilden  $y'$  i dess brännpunkt.

$$\tan(\theta') = \theta' = \frac{y'}{f_2}$$

Ett teleskops vinkelförstoringen är definierad som förhållandet mellan vinkeln av bilden till det av det inkommande ljuset.

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{y'/f_2}{y'/f_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

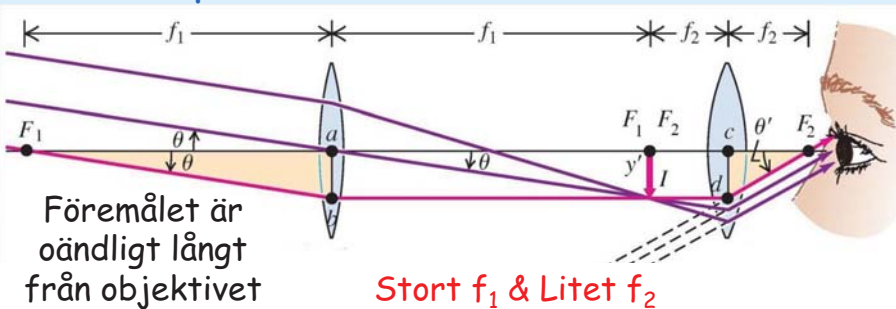


# Geometrisk optik

## Teleskop



### Teleskop



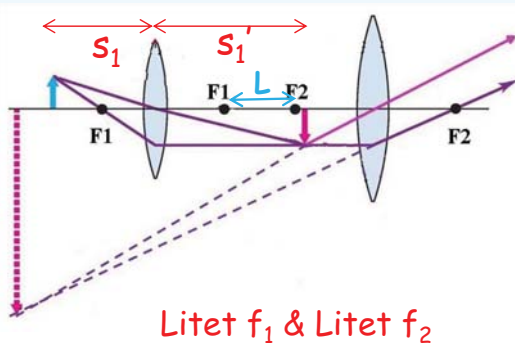
Föremålet är oändligt långt från objektivet

Stort  $f_1$  & Litet  $f_2$

$$M = -\frac{f_1}{f_2}$$

### Mikroskop

Föremålet är nära objektivet

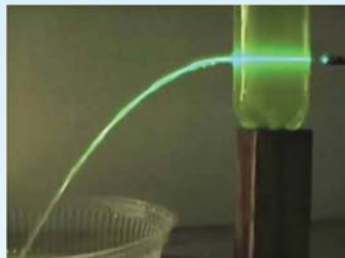
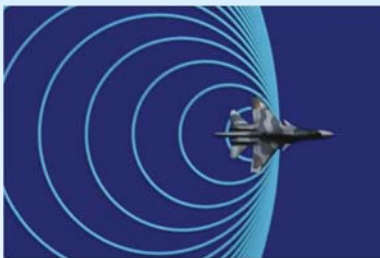


Litet  $f_1$  & Litet  $f_2$

$$M = m_1 M_2 = -\frac{s'_1 \sigma}{s_1 f_2} = -\frac{L \sigma}{f_1 f_2}$$

$\sigma$  är närpunkten (typiskt 25 cm)





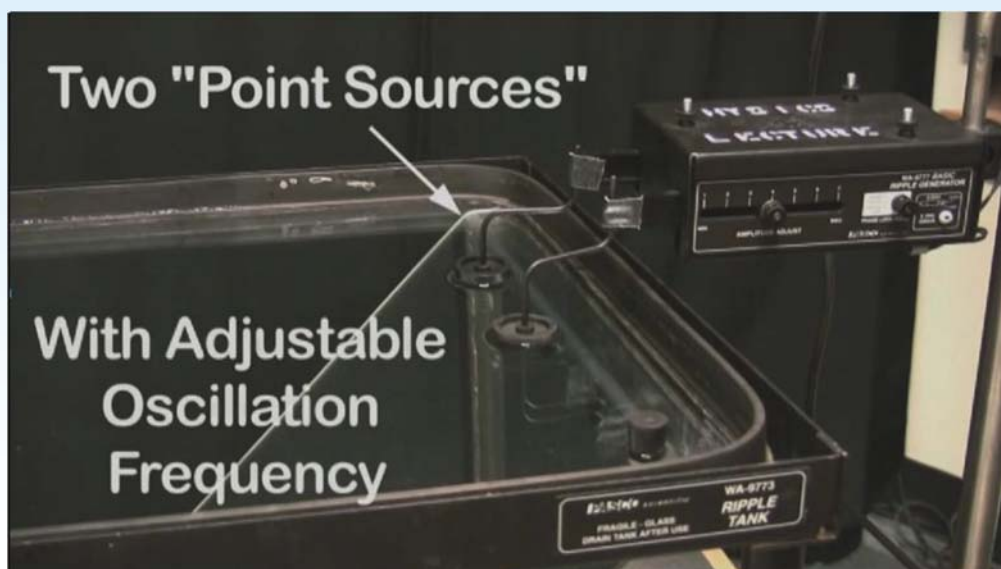
## Kapitel 35 - Interferens



## Interferens



# Interferens



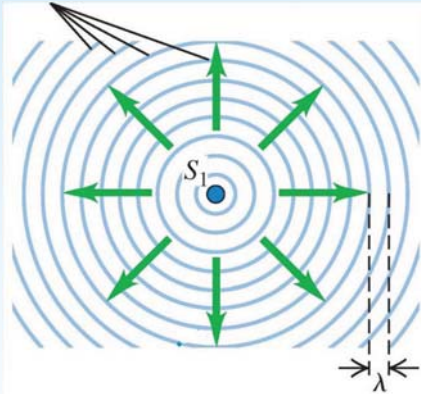
<https://www.youtube.com/watch?v=UMkAXvWIRY4>



# Interferens



**Vågfronter:** vågtoppar i en våg åtskilda av en  $\lambda$



**Interferens:**  
Vågor överlappar i rymden

**Koherenta källor:**  
samma frekvens (eller våglängd) och konstant fasförhållande (inte nödvändigtvis i fas).

## Superpositions principen

När två eller fler vågor överlagras så blir den momentana förflyttningen  
=  
Summan av förflyttningen från de individuella vågorna var för sig

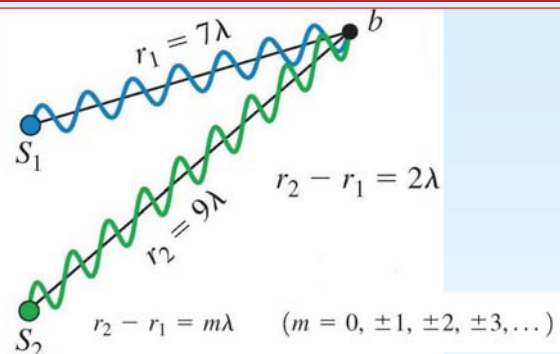
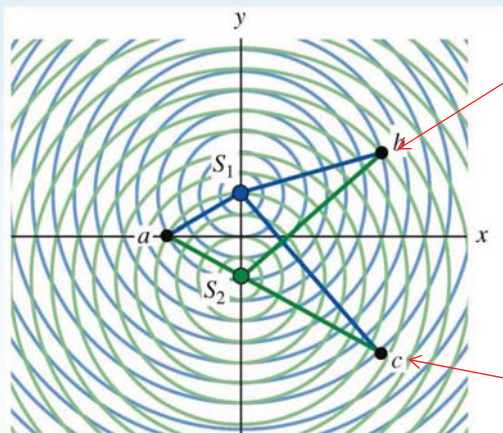


# Interferens



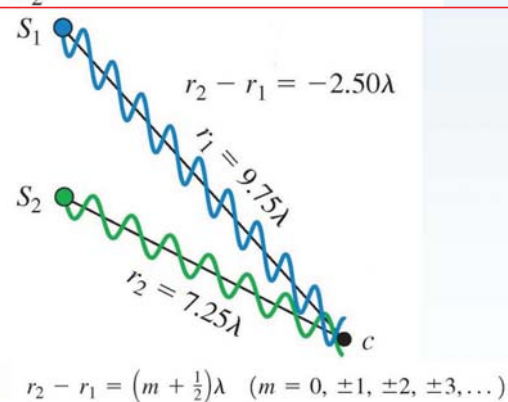
**Konstruktiv interferens** →

$$\delta = r_2 - r_1 = m\lambda \quad \text{Formelsamling}$$



**Destruktiv interferens** →

$$\delta = r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$





# Interferens



Antinodala kurvor =  
konstruktiv interferens  
(nod = minimum)

Anta att i en punkt gäller:

$$E_1 = E_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1 - \omega t + \varphi\right)$$

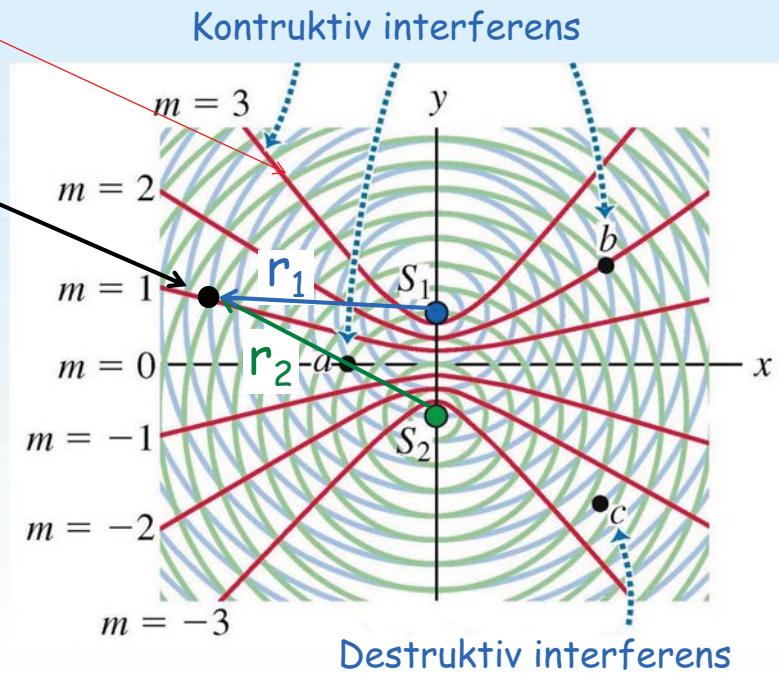
$$E_2 = E_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_2 - \omega t\right)$$

$$E = E_1 + E_2$$

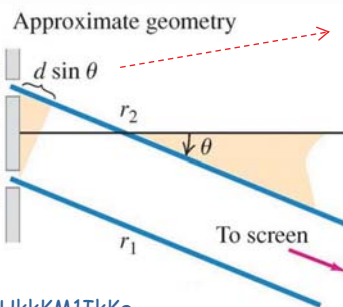
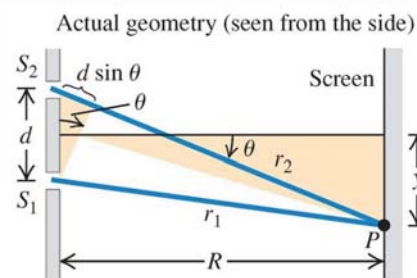
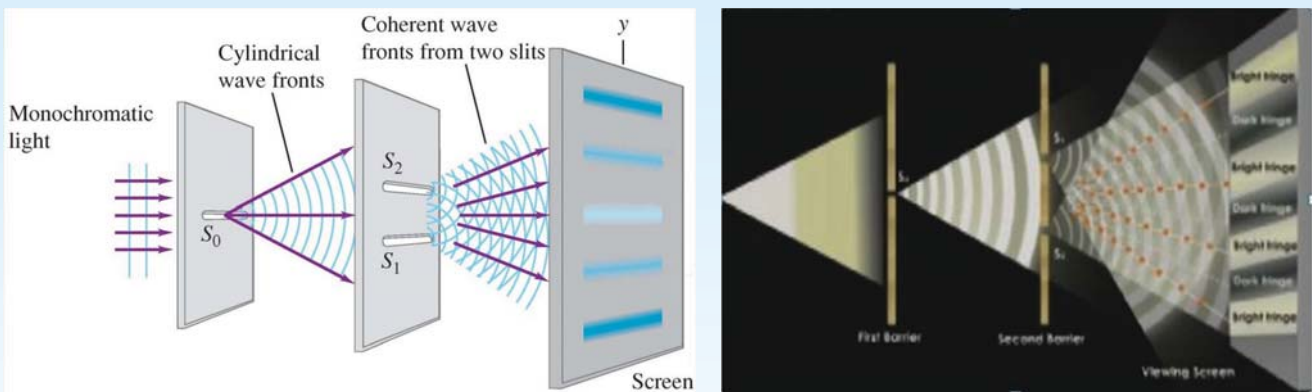
Att öka  $r_1$  med en våglängd ger samma ändring av  $E$  som att öka fasvinkeln  $\phi$  med  $2\pi$ :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Formelsamling



# Interferens



$$\delta = r_2 - r_1 = d \sin(\theta)$$

Konstruktiv

$$d \sin \theta = m \lambda$$

Destruktiv

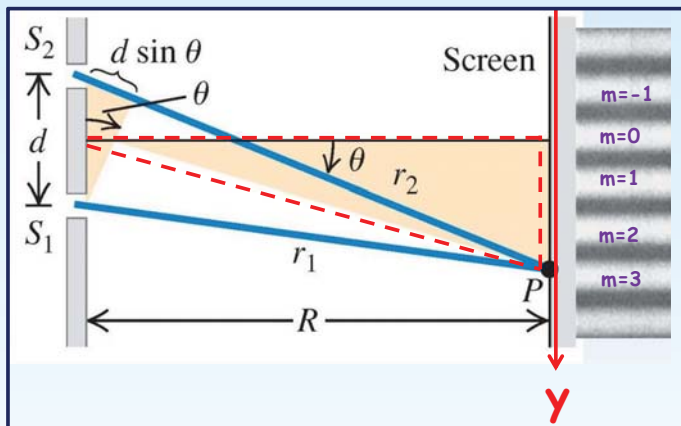
$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

<https://www.youtube.com/watch?v=9UkkKM1IkKg>

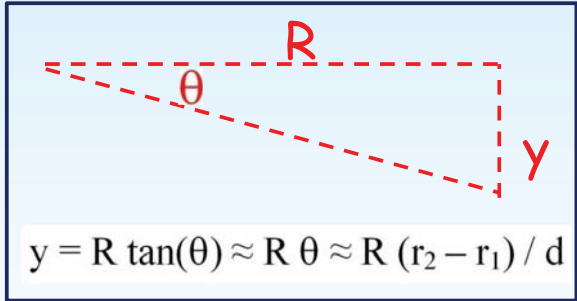




# Interferens



**Geometri:**  
 $r_2 - r_1 = d \sin(\theta) \approx d \theta$



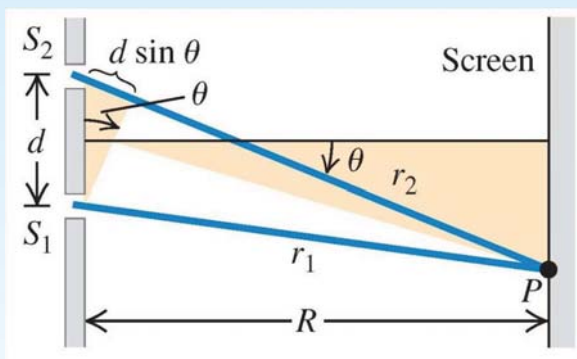
**Konstruktiv interferens:**  
 $r_2 - r_1 = m \lambda$

$$y_m = R \frac{m \lambda}{d}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$



# Interferens Intensitet



En vägskillnad av en våglängd motsvarar en fasskillnad på  $2\pi$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

**Väg skillnaden**  
 $r_2 - r_1 = d \sin \theta$

Formelsamling  $\phi = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$

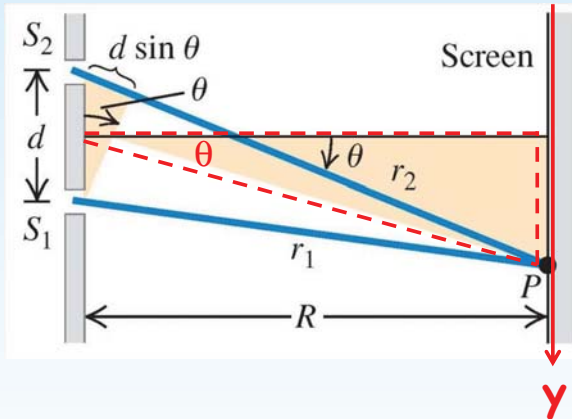
$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$



# Interferens Intensitet



## Introducera y i formeln



$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

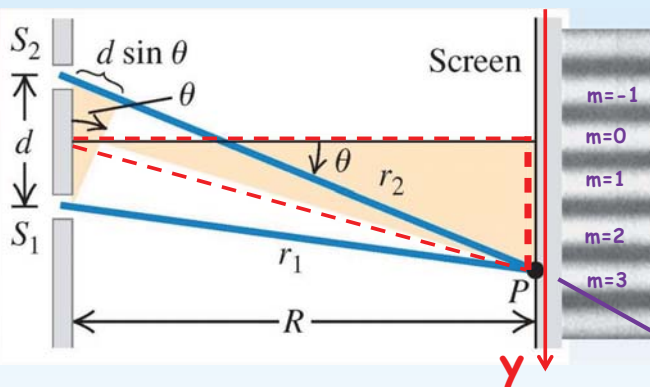
$$\tan(\theta) = y / R \approx \sin(\theta)$$

litet  $\theta$

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \approx \frac{2\pi dy}{\lambda R}$$



# Interferens Intensitet

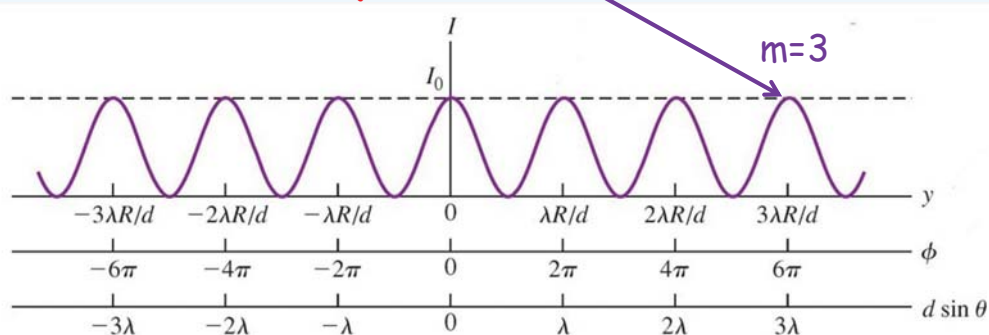


$$\phi \approx \frac{2\pi dy}{\lambda R}$$

Intensitet:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi dy}{\lambda R} \right)$$

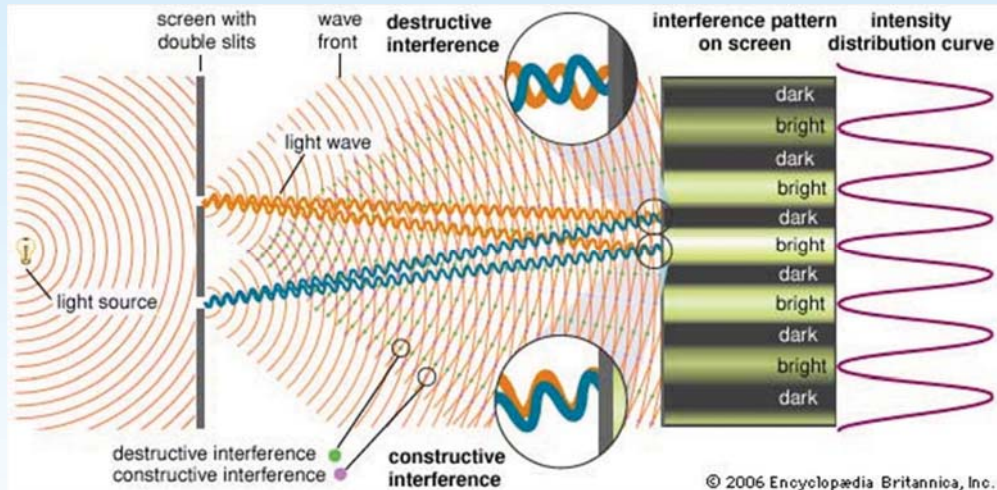
Formelsamling







# Interferens Intensitet



Konstruktiv interferens:

Formelsamling

$$r_2 - r_1 = d \sin(\theta) = m \lambda$$

$$y_m \approx m \cdot (R \lambda / d)$$

Intensitet

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \approx \frac{2\pi d y}{\lambda R}$$



# Interferens Michelsons interferometer



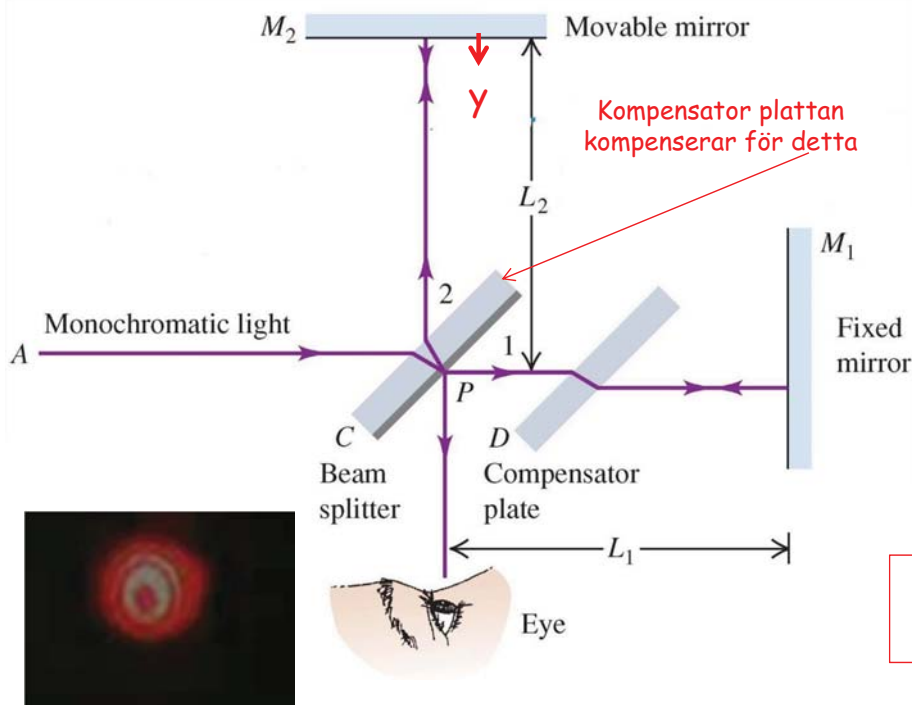
## Michelsons interferometer





# Interferens

## Michelsons interferometer



Observatören ser ett **interferensmönster** med ringar.

Ringarna i mönstret kommer att **röra sig** när spegeln flyttas.

Antalet ringar ( $m$ ) som passerar förbi kan användas för att **beräkna  $y$  eller  $\lambda$**

$$y = m \frac{\lambda}{2} \quad \lambda = \frac{2y}{m}$$

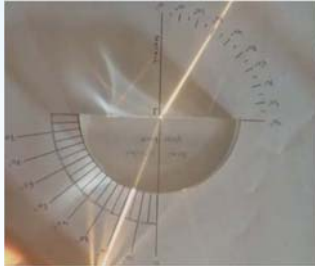
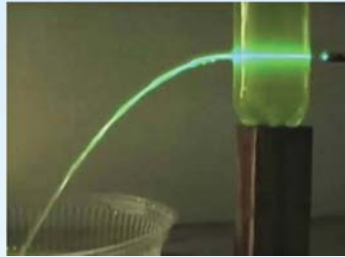
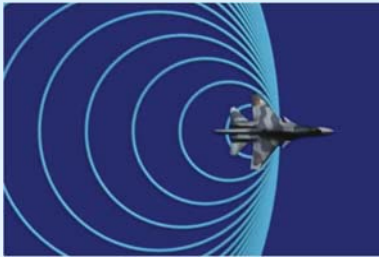


# Interferens

## Michelsons interferometer



<https://www.youtube.com/watch?v=j-u3IEqTiQ>



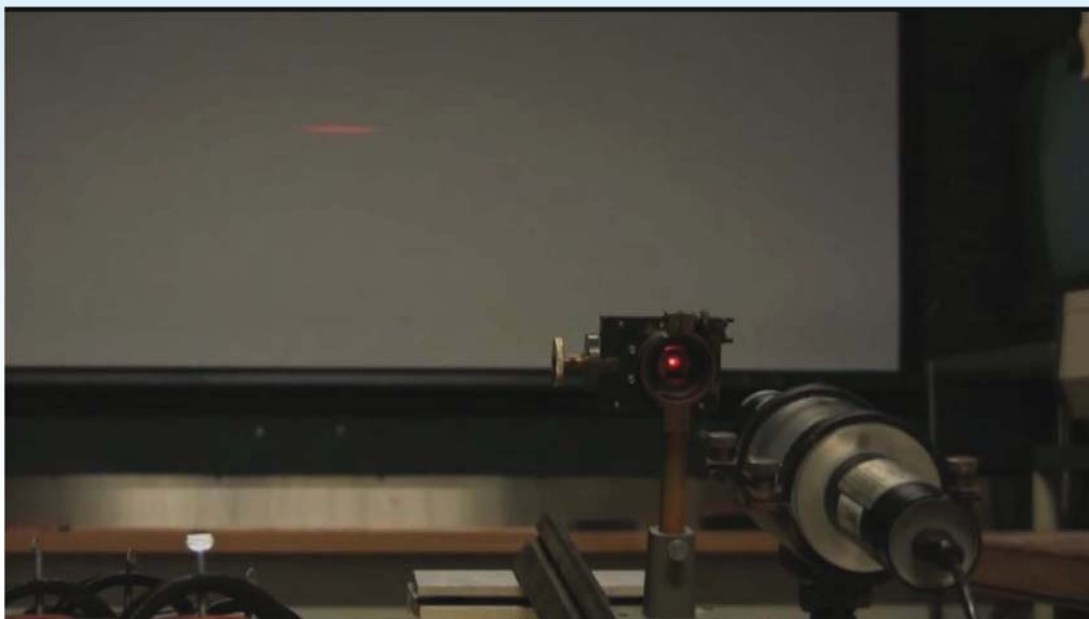
## Kapitel 36 - Diffraktion



## Diffraktion



# Diffraktion



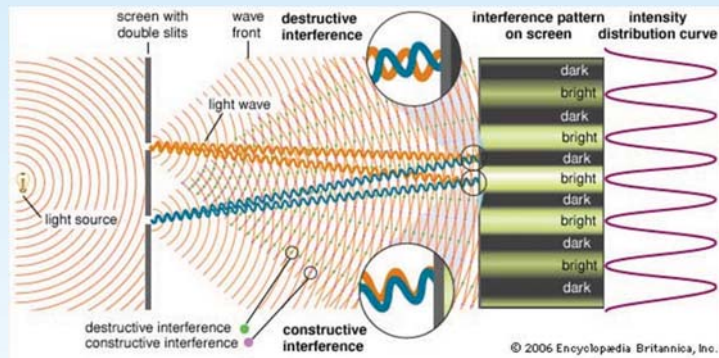




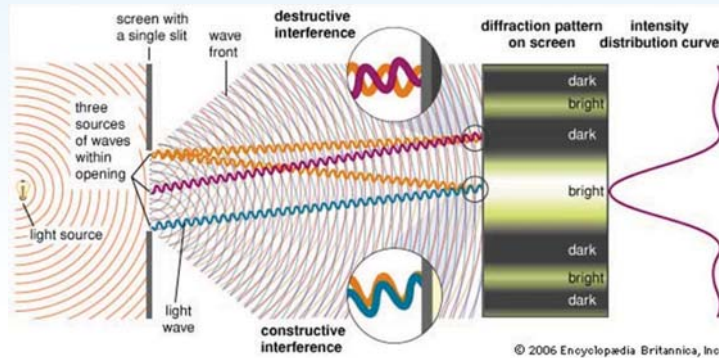
# Diffraction



Interferens:  
Dubbel spalt  
experiment



Diffraction:  
singel spalt  
experiment



# Diffraction



Dela upp spalten i många små imaginära spalter

$a =$   
spalt bredden

Plana vågor som träffar spalten

Varje imaginär spalt är en källa till sekundära vågelement (wavelets).

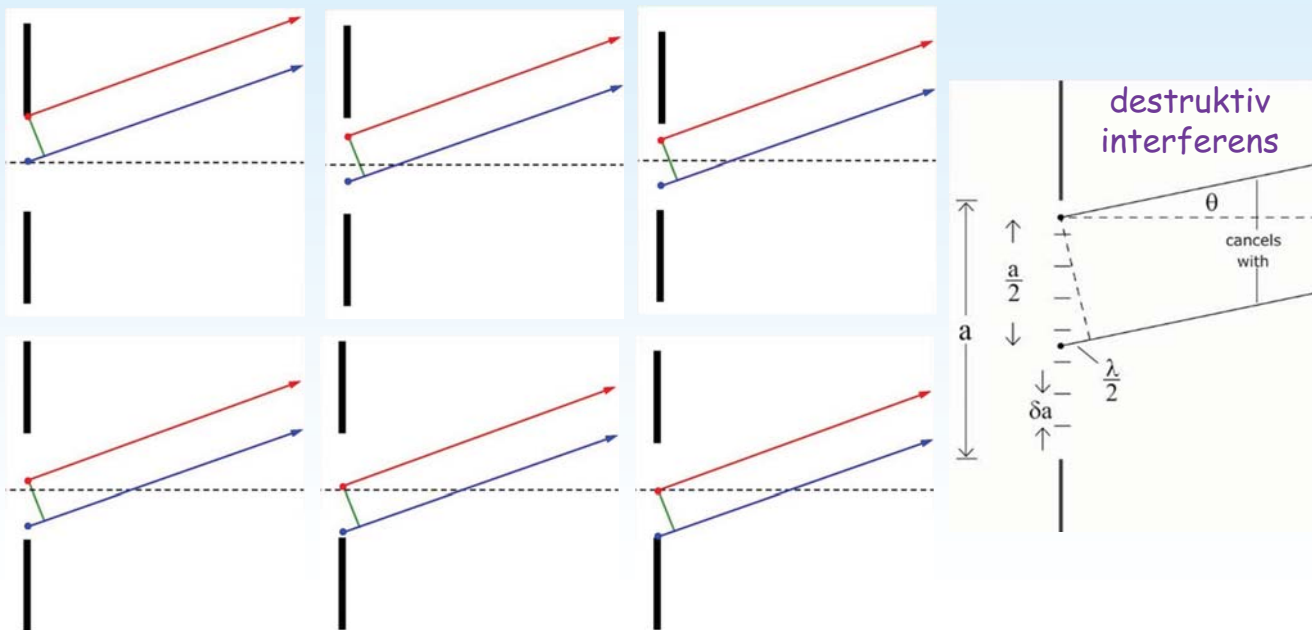




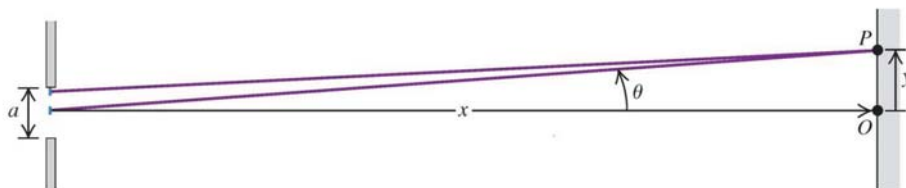
# Diffraction



**TRICKET:** För varje punkt i den övre halvan av spalten finns en motsvarande punkt i den nedre halvan som den kan interferera med.



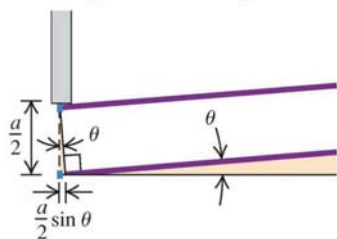
# Diffraction



**Geometri:**

$$\tan(\theta) = y / x$$

Enlarged view of the top half of the slit



**Destruktiv Interferens:**

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{2} m$$

$$\sin(\theta) = m\lambda/a \quad m = \pm 1, \pm 2,$$

Formelsamling

**Små vinklar:**

$$\tan(\theta) \approx \theta$$

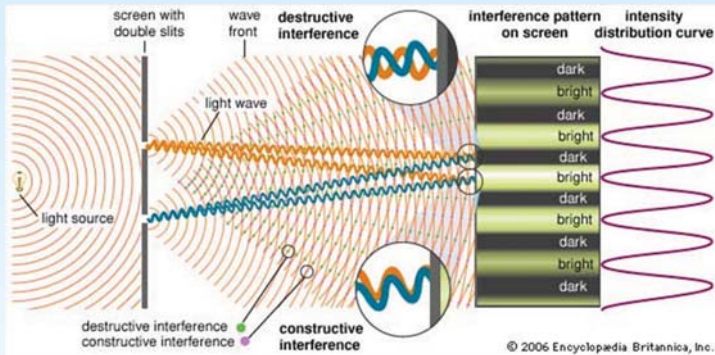
$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a} \quad (\text{for } y_m \ll x)$$

$$m = \pm 1, \pm 2,$$



# Diffraktion



Ljusa band:

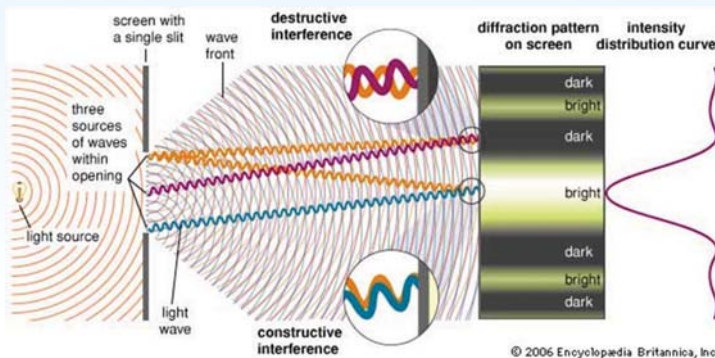
$$y_m = R \frac{m\lambda}{d}$$

Avstånd till skärmen

Våglängd

Spalt avstånd

$$m = 0, \pm 1, \pm 2,$$



Mörka band:

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a}$$

Avstånd till skärmen

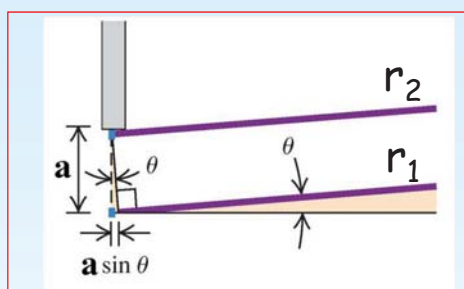
Våglängd

Spalt bredd

$$m = \pm 1, \pm 2,$$



# Diffraktion Intensitet



Vägskillnaden:  
 $r_2 - r_1 = a \sin(\theta)$

$r_2 - r_1$  är vägskillnaden mellan en stråle från toppen och botten av spalten.

En vägskillnad av en våglängd motsvarar en fasskillnad på  $2\pi$

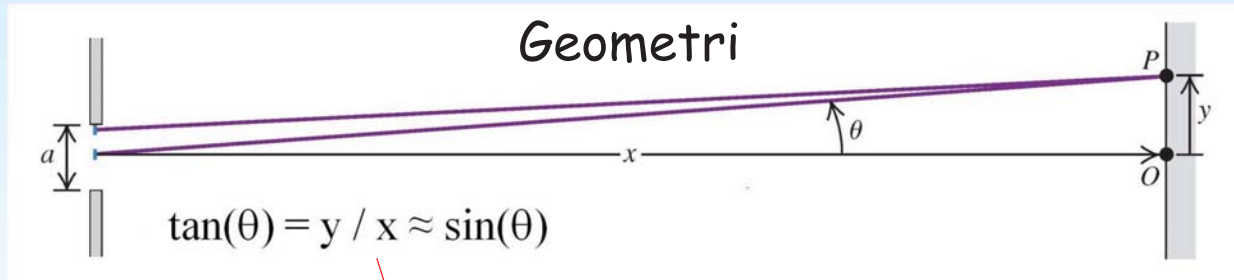
$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

Formelsamling



# Diffraktion Intensitet

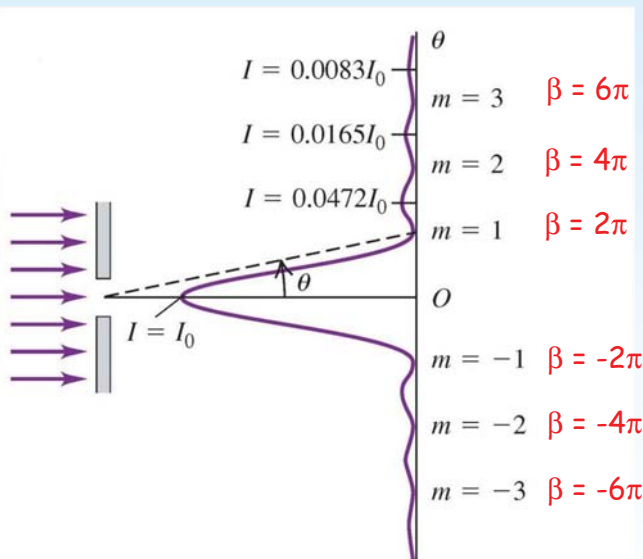


$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{x}$$



# Diffraktion Intensitet



## Formelsamling

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

där

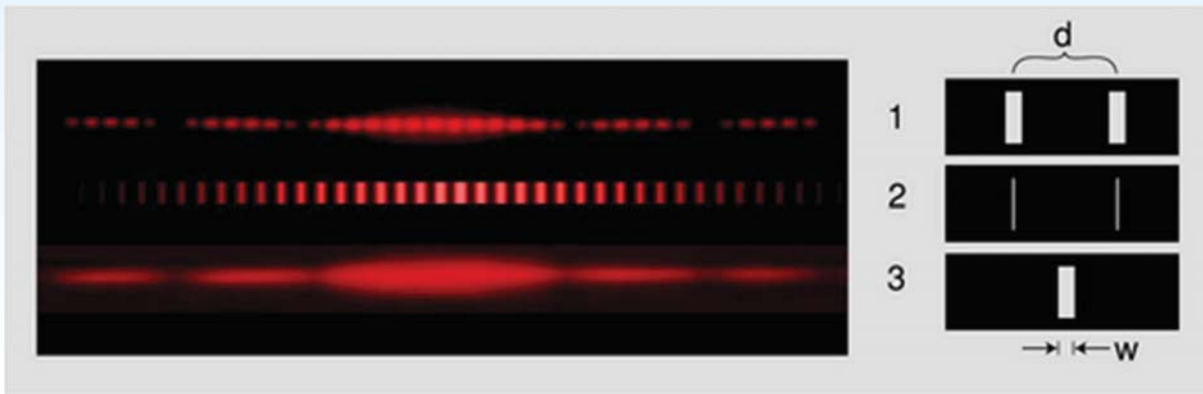
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{x}$$



# Diffraktion Två spalter



## Två breda spalter



# Diffraktion Två spalter



I studien av interferens från två spalter antogs det att de var mycket smala. Vad händer om de är breda?

Två smala spalter:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

En bred spalt:

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

Två breda spalter:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[ \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

där

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

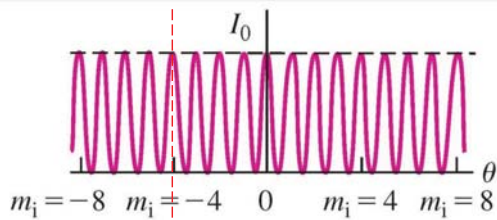
$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

Formelsamling



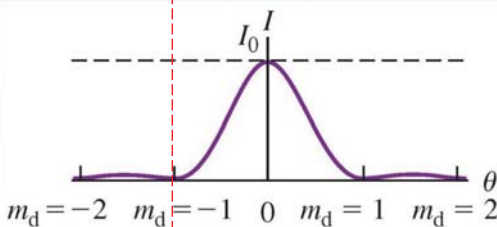


# Diffraction Två spalter



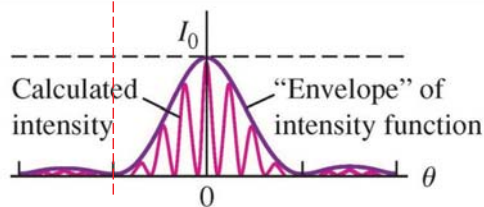
Två smala spalter:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$



En bred spalt:

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$



Två breda spalter:

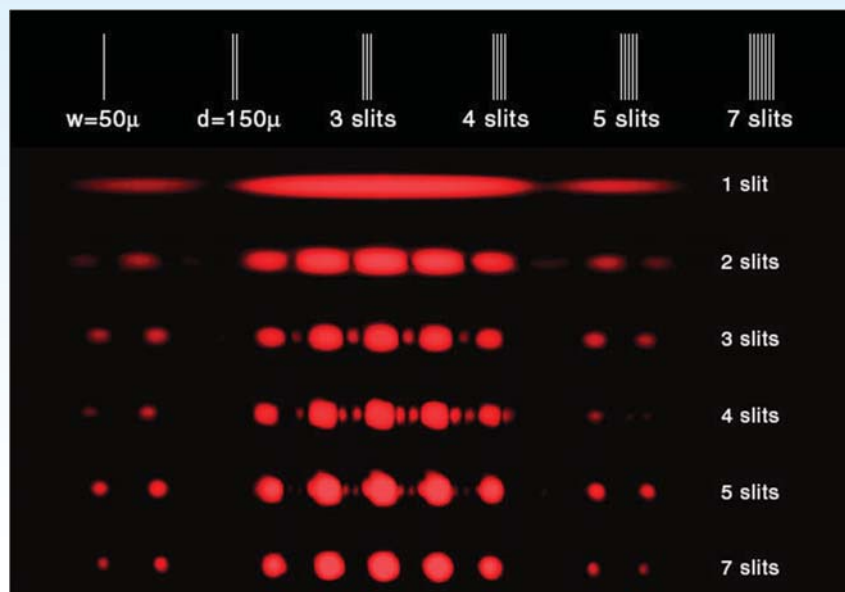
$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[ \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$



# Diffraction Många spalter



## Många spalter



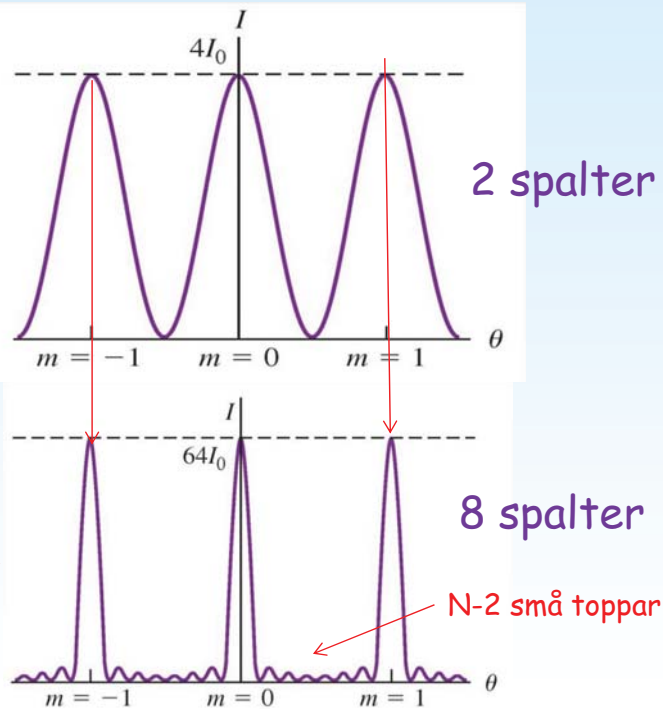
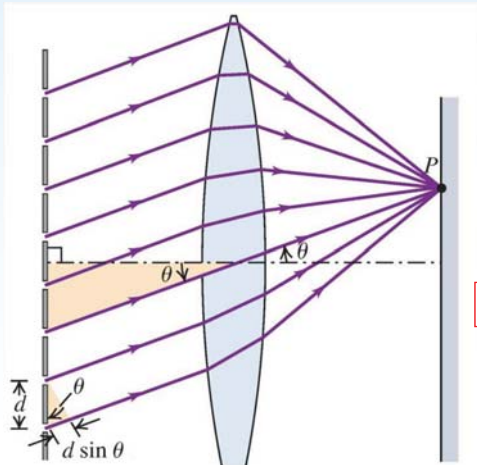


# Diffraction Många spalter



Vägskillnaden mellan intilliggande spalter som ger maximal intensitet med många spalter ges av:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



# Diffraction Många spalter

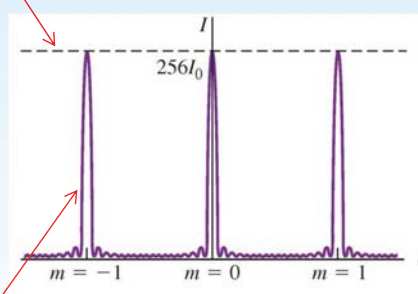
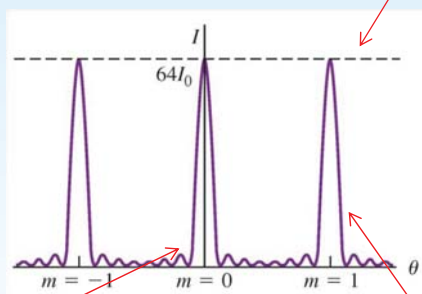
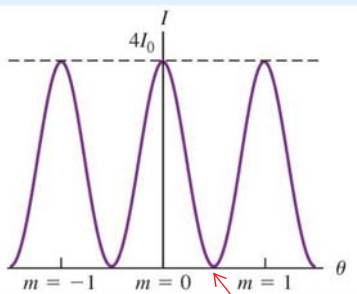


$$I_{\max} \sim N^2$$

N = 2

N = 8

N = 16



N-1 minimum  
N-2 små toppar

$$I_{\text{width}} \sim 1 / N$$

Huvud maximum:  $d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$



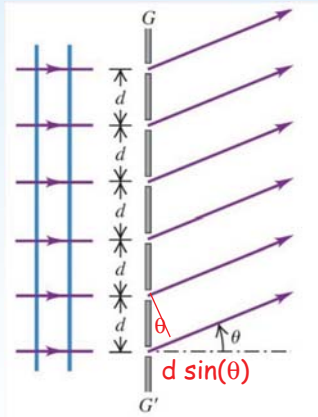
# Diffraction

## Många spalter



I **diffractions gitter** använder man **tusentals spalter** eller tusentals reflekterande ytor. Detta ger mycket **smala huvud maximum** som kan användas för att bestämma våglängden av olika ljus.

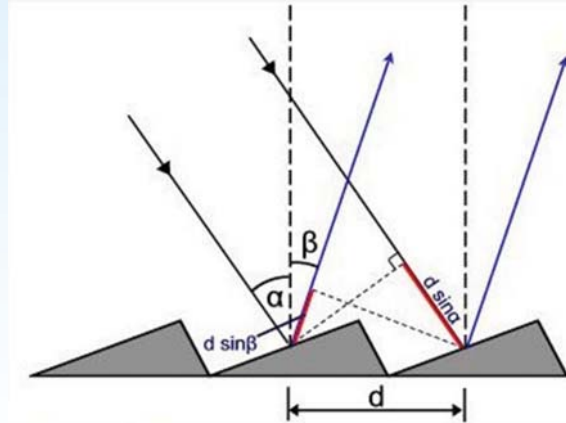
### Transmissions gitter



Vägskillnaden för maximum:

$$\delta = d \sin(\theta) = m\lambda$$

### Reflektions gitter



Vägskillnaden för maximum:

$$\delta = d \sin(\alpha) - d \sin(\beta) = m\lambda$$

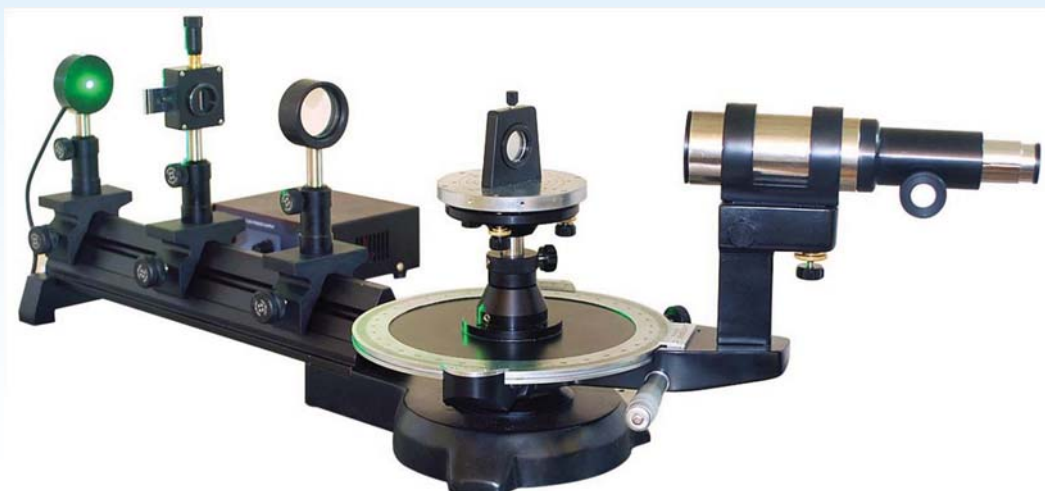


# Diffraction

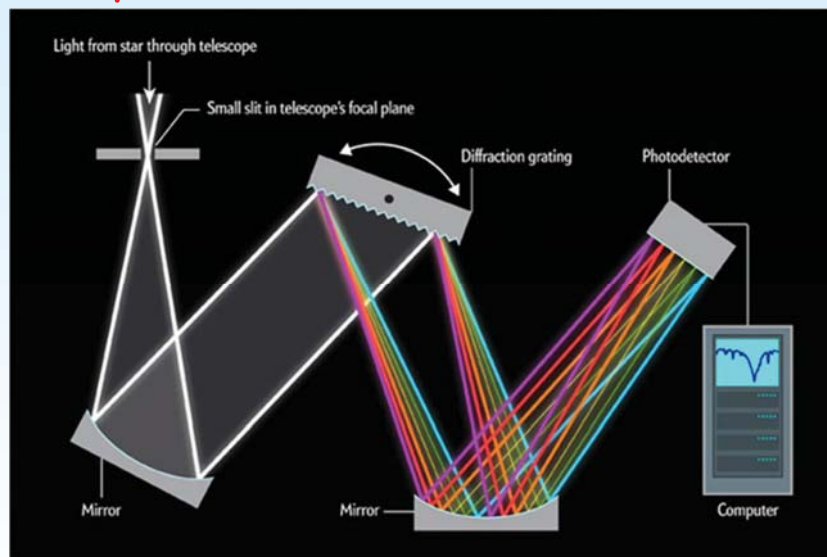
## Spektrometrar



# Spektrometrar



## Spektrometer för astronomi



Ljus som infaller på ett gitter dispergeras i ett spektrum. Vinklarna för avvikelser hos maxima mäts för att beräkna våglängden.

## Kromatisk upplösningförmåga :

Den minsta våglängdsskillnaden ( $\Delta\lambda$ ) som kan mätas av en spektrograf.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (\text{chromatic resolving power})$$

Formelsamling

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

Antal spalter i ett gitter

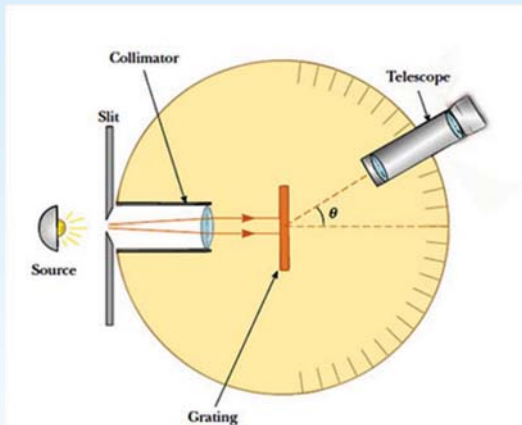
Ordningen av toppen i diffraktions spectrat

R är högre för många spalter och högre ordningar !





# Diffraktion Spektrometrar



<https://www.youtube.com/watch?v=b85paV77dS8>

Gitter: 1000 spalter per mm    Första maximum vid  $24^\circ$     Vad är  $\lambda$  ?

$$d \sin \theta = m \lambda \quad \text{med} \quad d = 1 \text{ mm} / 1000 \text{ slits} = 10^{-6} \text{ m}$$

$$\theta = 24^\circ$$

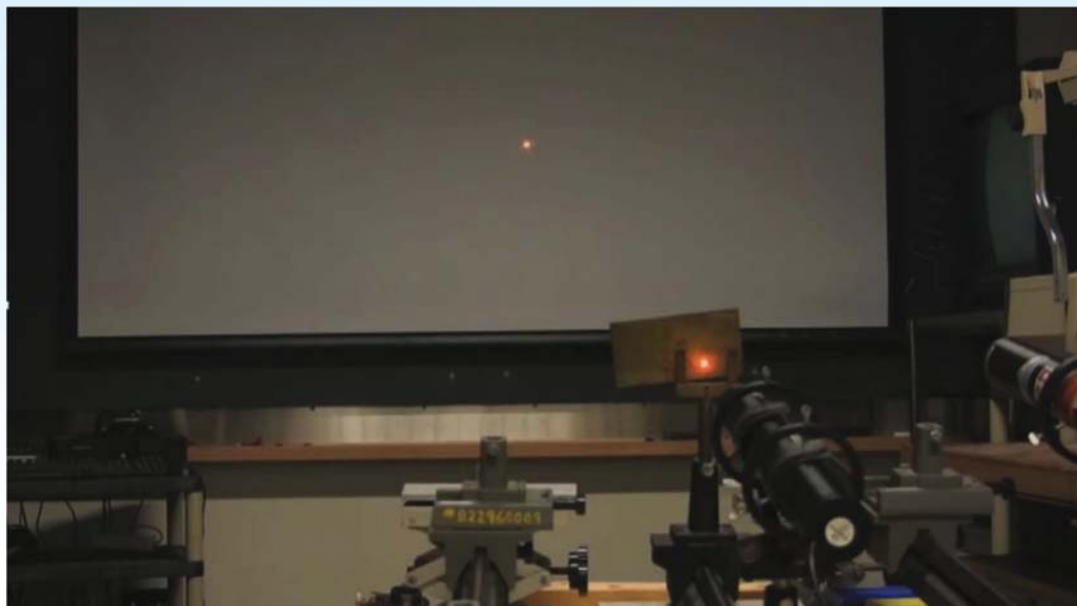
$$\lambda = d \sin(\theta) = 10^{-6} \sin(24^\circ) = 0.407 \times 10^{-6} = 407 \text{ nm}$$



# Diffraktion Hål diffraktion



## Hål diffraktion



<https://www.youtube.com/watch?v=9D8cPrEAGyc>

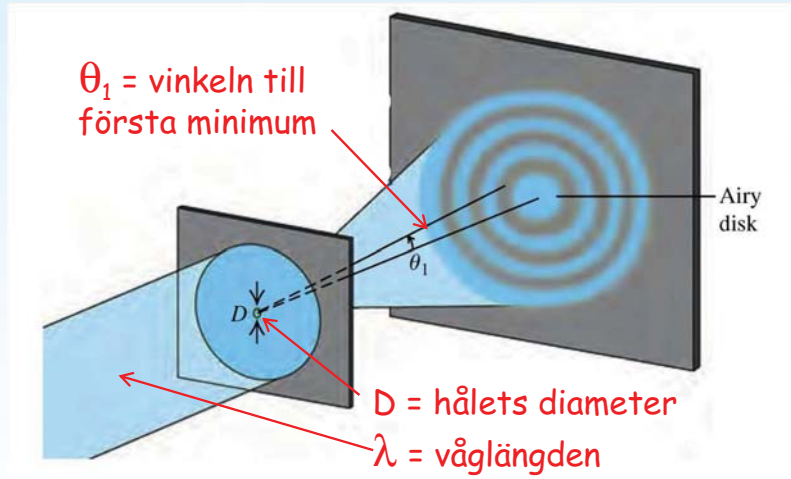
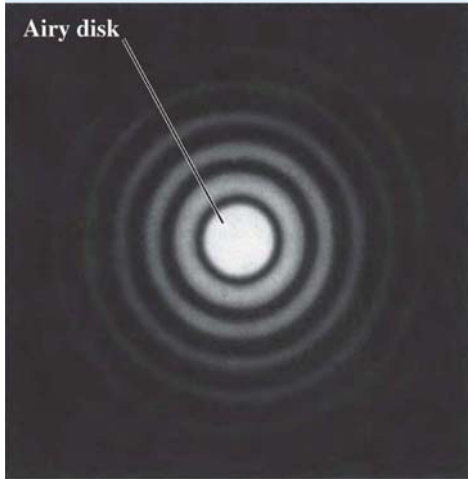


# Diffraction

## Hål diffraction



Diffraction begränsar vinkelupplösningen av optiska instrument.



Vinkeln till första minimum:  $\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  (diffraction by a circular aperture)



# Diffraction

## Hål diffraction

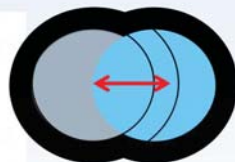
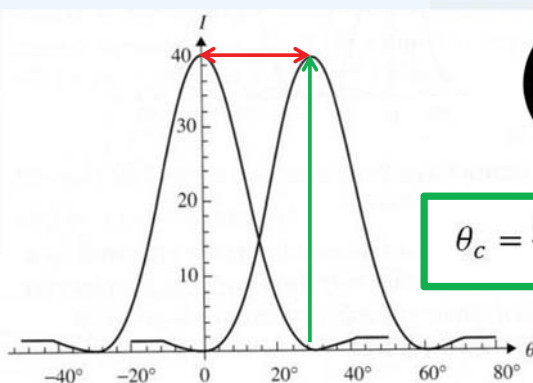


**Rayleigh kriterium:**

Två punktojekt kan upplösas av ett optiskt system om deras vinkel separation är större än  $\theta_1$

$$\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Gränsen för upplösningen av två föremål är när centrum av ett diffraktionsmönster är i det första minimum av det andra mönstret.



$$\theta_c = \frac{1.22 \cdot \lambda}{d} \text{ (runt hål)}$$

Formelsamling

