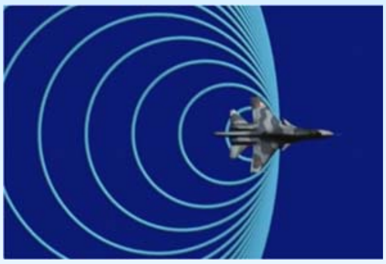
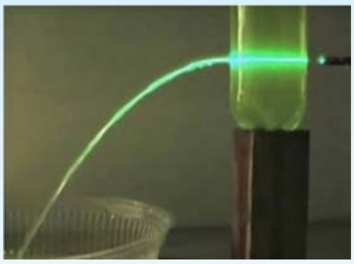
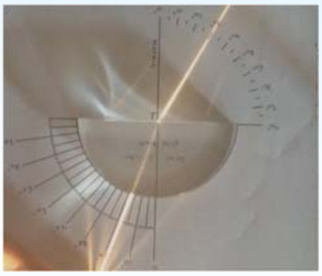
Vågrörelselära och optik



Kapitel 15 – Mekaniska vågor

Mekaniska vågor: Transversella vågor

Del 1. Transversella vågor

Mekaniska vågor:
Transversella vågor

Vad är en våg ?

En våg uppstår när ett systems jämviktstillstånd störs och denna störning förflyttar sig.

En mekanisk våg förflyttar sig i ett medium.

En elektromagnetisk våg kan också förflytta sig utan ett medium i vakuum.

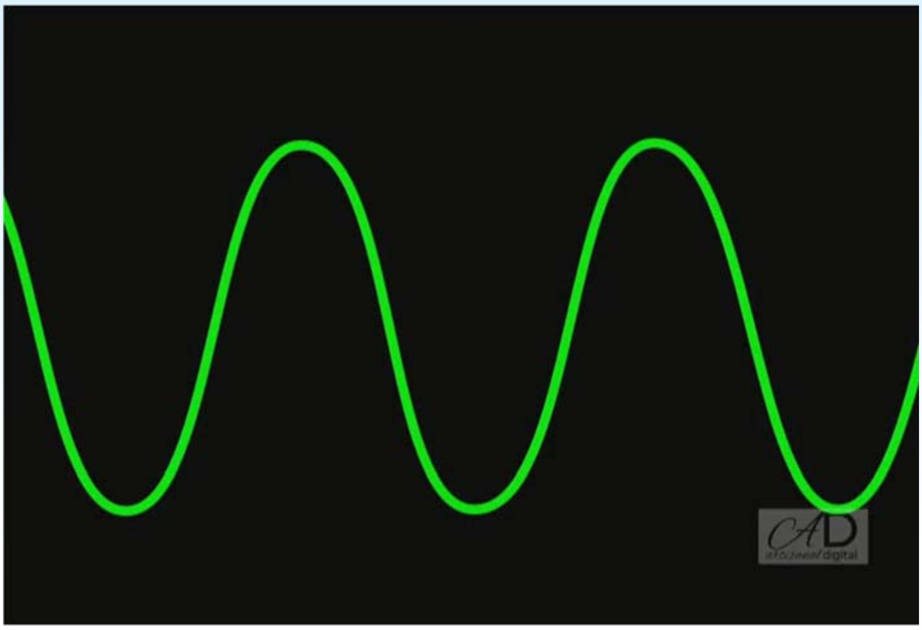
Vågor transporterar energi men inte materia.

Mekaniska vågor:
Transversella vågor

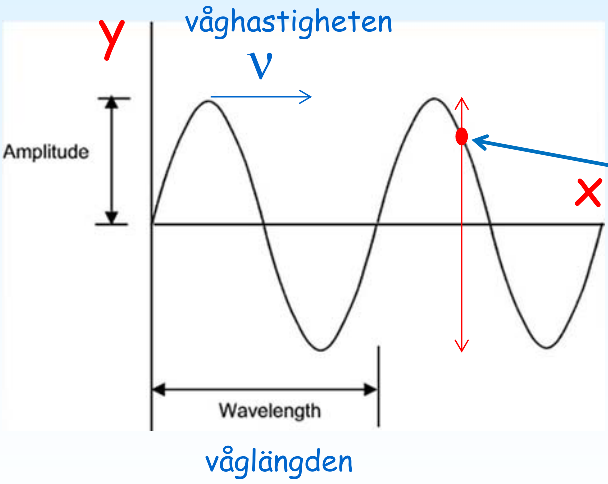
Transversell våg: Mediumet rör sig i transversell riktning mot vågens färdriktning.

https://www.youtube.com/watch?v=FUBGrH-PbsU

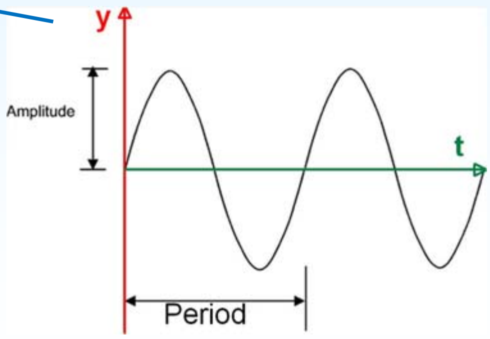
En speciell transversell våg är den sinusformade vågen:



Transversella sinus vågor

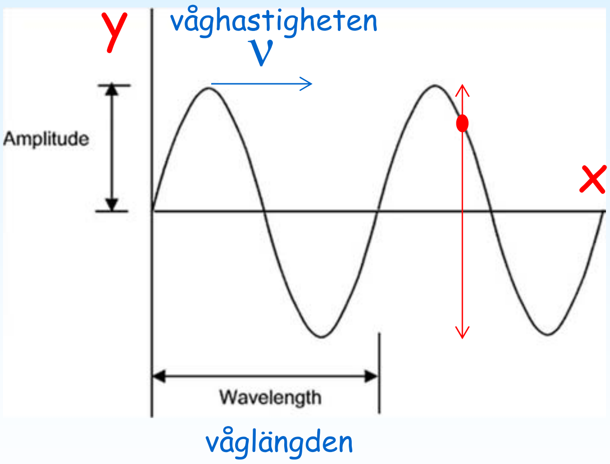


Varje punkt på vågen rör sig upp och ner som en harmonisk svängning med perioden T.



Mekaniska vågor: Transversella vågor

Definitioner:



A: Amplitud (m)

T: Period (s)

λ: Våglängd (m)

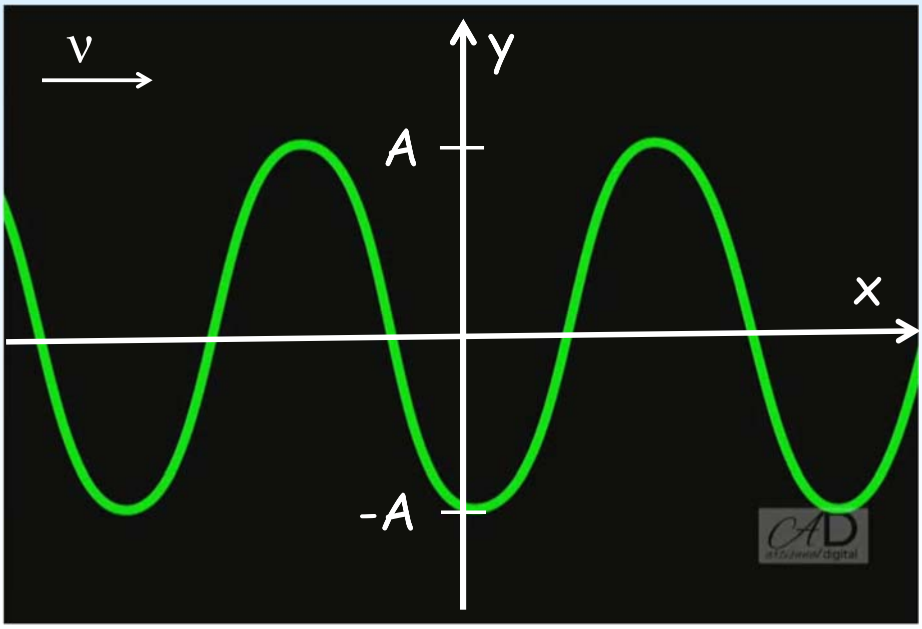
v: Våghastighet (m/s) = λ / T

f: Frekvens (Hz) = 1 / T

ω: Vinkelfrekvens (radianer /s) = 2 π f

k: Vågtal (radianer /m) = 2 π / λ

Mekaniska vågor: Transversella vågor



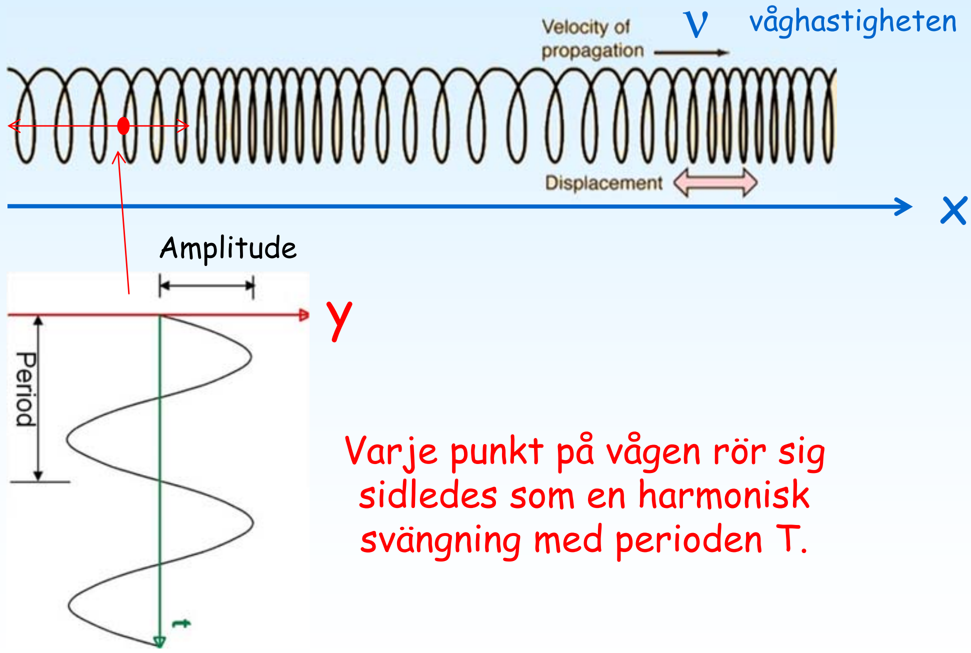
Del 2. Longitudinella vågor

Longitudinella vågor av Slipnot:
Why don't you get a job ?

Longitudinella vågor:
Mediumet rör sig i vågens rörelseriktning.

Mekaniska vågor: Longitudinella vågor

Longitudinella sinus vågor



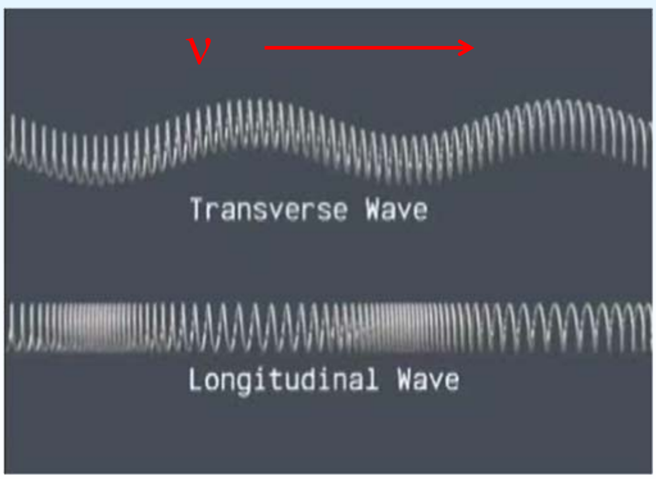
Varje punkt på vågen rör sig sidledes som en harmonisk svängning med perioden T.

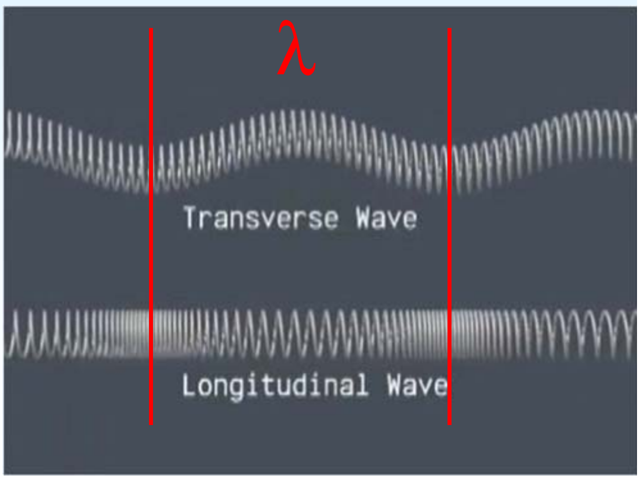
Mekaniska vågor: Longitudinella vågor

Vad är våglängden (λ) för en sinus våg ?

Vad är våghastigheten (v) ?

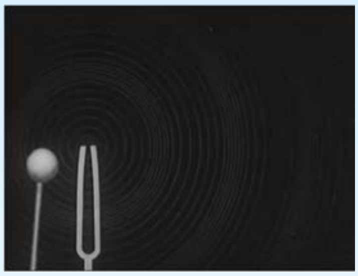
$$v = \lambda / T = \lambda f$$

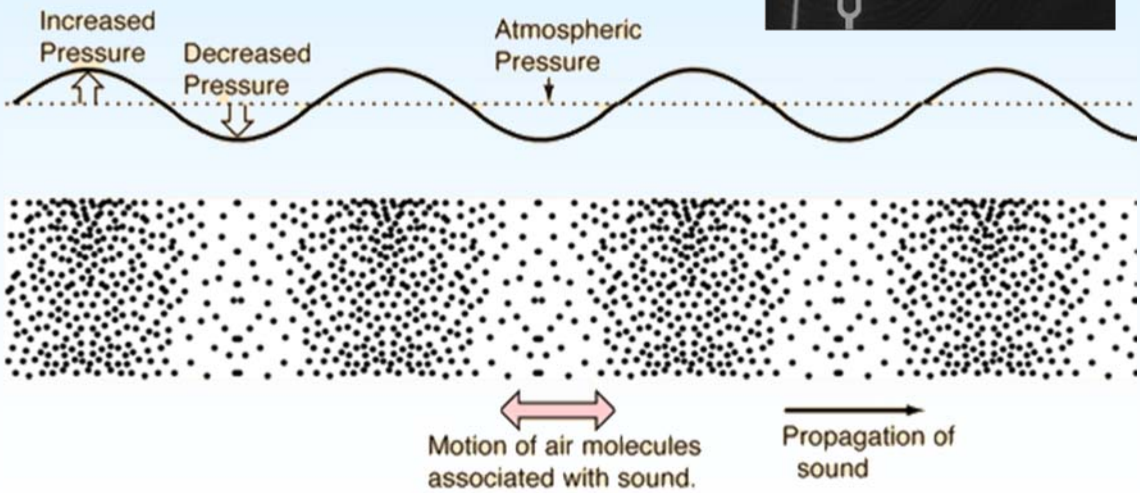




Mekaniska vågor: Longitudinella vågor

Ljud är longitudinella vågor i luft.





Mekaniska vågor Problem

Del 3. Problem lösning

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\mathrm{si}\cancel{n}\, x =$$

$$six = 6$$

Mekaniska vågor
Problem

Ljudets hastighet beror av temperaturen och är 344 m/s vid 20 grader.

Vad är då våglängden av ljud med frekvensen 262 Hz ?

$$\boxed{v = f\,\lambda}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344\ \mathrm{m/s}}{262\ \mathrm{Hz}} = \frac{344\ \mathrm{m/s}}{262\ \mathrm{s}^{-1}} = 1.31\ \mathrm{m}$$

Mekaniska vågor:
Vågfunktionen

Del 4. Vågfunktionen

Einstein:

$E = mc^2$

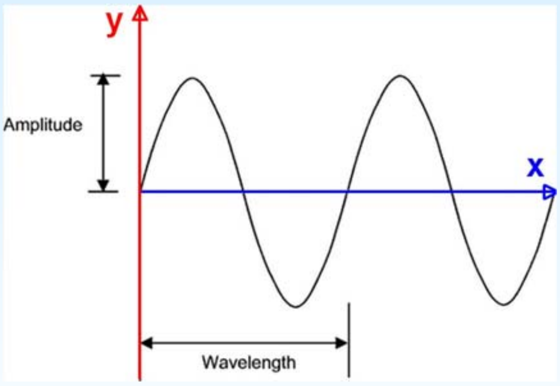
Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

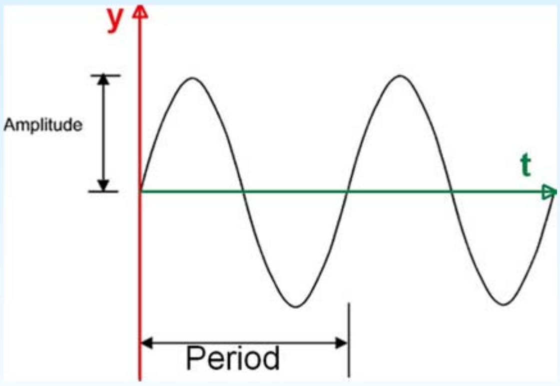
$\therefore\ E = m(a^2 + b^2)$?

Mekaniska vågor: Vågfunktionen

Höjden av vågen som funktion av avståndet x:



Höjden av vågen som funktion av tiden t:



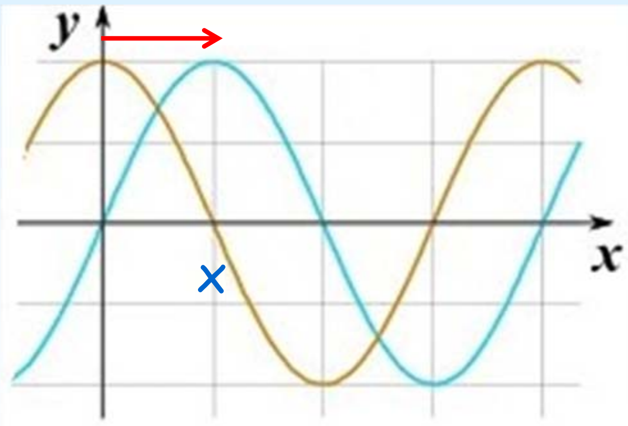
Vågfunktionen y(x,t):

Vågfunktionen beskriver höjden av vågen som funktion av både avstånd och tid.

Mekaniska vågor: Vågfunktionen

En våg förflyttar sig sträckan x under tiden

$\Delta t = x/v$



Anta att punkten vid x=0 kan beskrivas av

$y(0,t) = A\cos(\omega t)$

En annan punkt vid läget x kommer ha samma y som vågen hade $\Delta t = x/v$ tidigare d.v.s. substituera t mot $t-x/v$:

$$y(x,t) = A\cos(\omega(t-x/v))$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega(x/v-t))$$

↑

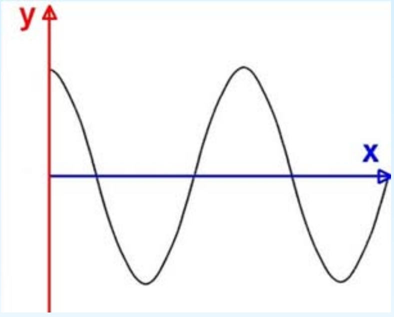
cos(-x) = cos(x)

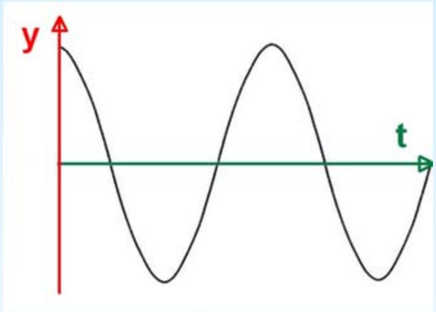
$$y(x,t) = A\cos(\omega(x/v-t)) = A\cos(2\pi f(x/v-t)) = A\cos(2\pi(fx/v-ft))$$

$$y(x,t) = A\cos(2\pi(x/\lambda-t/T)) = A\cos(kx-\omega t)$$

$f/v = 1/\lambda$ $f=1/T$

Mekaniska vågor: Vågfunktionen





$y(x, t = 0) = A\cos kx$

$y(x = 0, t) = A\cos \omega t$

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$ (sinusoidal wave moving in $+x$-direction)

+ om vågen rör sig i den negativa x riktningen

Mekaniska vågor: Vågfunktionen

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$ (sinusoidal wave moving in $+x$-direction)

Amplitud: A

$\nu = \lambda / T$
$f = 1 / T$

Vågtal: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Vinkelfrekvens: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\boxed{\nu = \lambda / T = (2\pi/k) / (2\pi/\omega) = \omega / k}$$

Mekaniska vågor: Vågfunktionen

Vågfunktionen:

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

Hastighet och acceleration:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

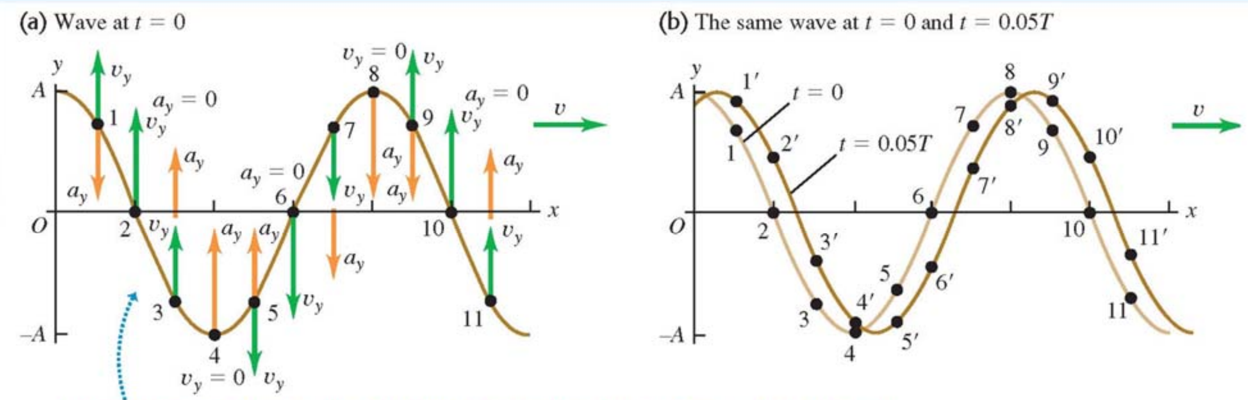
$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$

Mekaniska vågor: Vågfunktionen

Hastighet och acceleration:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$



- Acceleration a_y at each point on the string is proportional to displacement y at that point.
- Acceleration is upward where string curves upward, downward where string curves downward.

Mekaniska vågor: Vågekvationen

Ekvationen för standard modellen i partikelfysik:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{SM} = -\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \\
M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w(\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - \\
Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - igs_w(\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \\
\tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + \\
g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w (A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - \\
2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2 \alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \\
\beta_h \left(\tfrac{2M^2}{g^2} + \tfrac{2M}{g} H + \tfrac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)\right) + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - g\alpha_h M \left(H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-\right) - \\
\tfrac{1}{8}g^2 \alpha_h \left(H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2\right) - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \\
\tfrac{1}{2}g\tfrac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \tfrac{1}{2}ig\left(W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)\right) + \\
\tfrac{1}{2}g\left(W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) + W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)\right) + \tfrac{1}{2}g\tfrac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) + \\
M\left(\tfrac{1}{c_w}Z^0_\mu\partial_\mu\phi^0 + W^+_\mu\partial_\mu\phi^- + W^-_\mu\partial_\mu\phi^+\right) - ig\tfrac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_wMA_\mu(W^+_\mu\phi^- - \\
W^-_\mu\phi^+) - ig\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_wA_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \\
\tfrac{1}{4}g^2 W^+_\mu W^-_\mu \left(H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-\right) - \tfrac{1}{8}g^2\tfrac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu \left(H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-\right) - \\
\tfrac{1}{2}g^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{2}ig^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}g^2 s_w A_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + \\
W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - g^2\tfrac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- + \\
\tfrac{1}{2}ig_s\lambda^a_{ij}(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_e)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_\nu)\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_u)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_d)d^\lambda_j + \\
igs_wA_\mu\left(-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \tfrac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)\right) + \tfrac{ig}{4c_w}Z^0_\mu\{(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - \\
1 - \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(\tfrac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5)d^\lambda_j) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \tfrac{8}{3}s_w^2 + \gamma^5)u^\lambda_j)\} + \\
\tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu\left((\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)U^{lep}{}_{\lambda\kappa}e^\kappa) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)\right) + \\
\tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu\left((\bar{e}^\kappa U^{lep\dagger}{}_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)\right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+\left(-m^\kappa_e(\bar{\nu}^\lambda U^{lep}{}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)e^\kappa) + m^\lambda_\nu(\bar{\nu}^\lambda U^{lep}{}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)e^\kappa\right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-\left(m^\lambda_e(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)\nu^\kappa) - m^\kappa_\nu(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)\nu^\kappa\right) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_\nu}{M}H(\bar{\nu}^\lambda\nu^\lambda) - \\
\tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_e}{M}H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_\nu}{M}\phi^0(\bar{\nu}^\lambda\gamma^5\nu^\lambda) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_e}{M}\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda) - \tfrac{1}{4}\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\gamma_5)\hat{\nu}_\kappa - \\
\tfrac{1}{4}\overline{\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\gamma_5)\hat{\nu}_\kappa} + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+\left(-m^\kappa_d(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)d^\kappa_j) + m^\lambda_u(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j\right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-\left(m^\lambda_d(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m^\kappa_u(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)u^\kappa_j\right) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_u}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_d}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \\
\tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_u}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_d}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j)
\end{gathered}
$$

Del 5. Vågekvationen

Mekaniska vågor: Vågekvationen

Vågfunktionen: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

Hastighet och acceleration:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x,t)$$

Krökningen:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)/\partial t^2}{\partial^2 y(x,t)/\partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2$$

$v = \lambda / T = \omega / k$

Vågekvationen: $$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Mekaniska vågor: Vågekvationen

Vågekvationen: $$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Vågekvationen bekriver också vågor som inte är sinusformade !

Den beskriver till och med vågor som inte är periodiska !

Och vågor i tre dimensioner !

Mekaniska vågor Problem

Del 6. Problem lösning

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\mathrm{si}\cancel{\mathrm{n}}\,x =$$

$$six = 6$$

Mekaniska vågor
Problem

Du viftar med ett rep upp och ner och skapar en sinusvåg med frekvensen 2.00 Hz, amplituden 0.075 m och våghastigheten 12.0 m/s.

Beräkna perioden, våglängden, vinkelfrekvensen och vågtalet !

$f = 1/T$
$\omega = 2\pi f$
$v = f\lambda$
$k = 2\pi/\lambda$

Givet:

A: Amplitude = 0.075 m
f: Frequency = 1 / T = 2.00 Hz
v: Wave speed = λ / T = 12.0 m/s

Att beräkna:

T: Period = 1 / f = 0.5 s
λ: Wavelength = v T = 6.00 m
ω: Angular frequency = $2\pi f = 4\pi$
k: Wave number = $2\pi/\lambda = \frac{1}{3}\pi$

Mekaniska vågor
Problem

Vid t = 0 befinner sig repet du håller i handen (x=0) i sitt högsta läge (0.075 m).
Vad är vågfunktionen för svängningarna ?
Vad blir vågfunktionen för x = 0 och x = 3.00 m ?

Beräknat tidigare:

ω: Angular frequency = $2\pi f = 4\pi$
k: Wave number = $2\pi/\lambda = \frac{1}{3}\pi$

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx-\omega t)} = 0.075\cos(\tfrac{1}{3}\pi x - 4\pi t)$$

$$y(0,t) = 0.075\cos(-4\pi t) = 0.075\cos(4\pi t)$$

$$y(3,t) = 0.075\cos(\pi-4\pi t) = -0.075\cos(-4\pi t) = -0.075\cos(4\pi t)$$

$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$

Del 7. Våg hastighet och sträng egenskaper

https://www.youtube.com/watch?v=ttgLyWFINJI

Mål:

Ta reda på hur våghastigheten beror på strängens egenskaper !

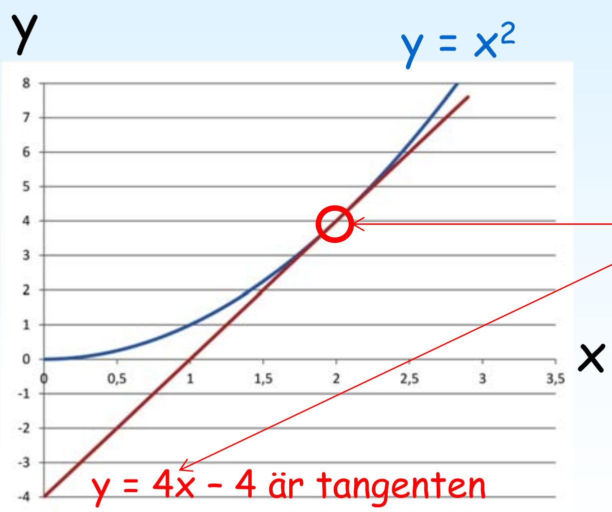
Hur:

Titta på krafterna på ett litet sträng segment och sedan använda Newtons lag:

$F = m\,a$

Mekaniska vågor
Våg hastighet

Först lite repetition av derivatans innebörd.
Med funktionen $y = x^2$ som exempel !



$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

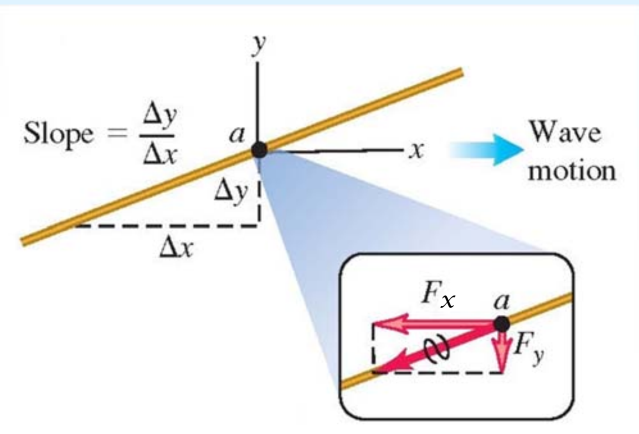
$$\frac{dy}{dx} = 4 \quad for\ x = 2$$

$y = 4x - 4$ är tangenten
till $y=x^2$ i punkten $x = 2$

Derivatan ger lutningen av tangenten till funktionen som har deriverats.

Mekaniska vågor
Våg hastighet

Vi börjar med att titta på krafterna i en punkt på strängen !



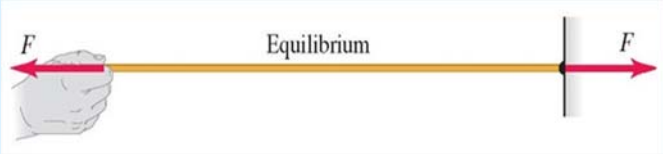
Förhållandet mellan kraften i y-riktningen till kraften i x-riktningen ges av strängens lutning som ges a derivatan:

$$Slope = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$F_y(x,t) = -F_x \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

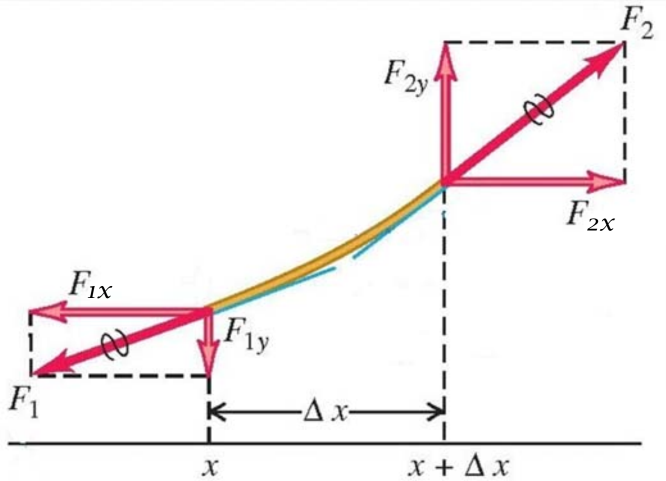
F_y är i negativ y-riktning

Mekaniska vågor
Våg hastighet



När strängen är i vila finns bara en kraft i x-riktningen: Spännkraften (F).

Sedan tittar vi på krafterna i ett segment av strängen :

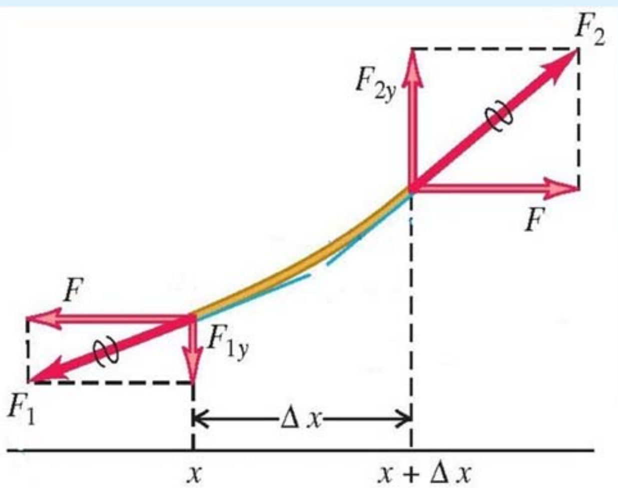


När en transversell våg passerar strängen kommer den röra sig upp och ner men inte sidledes dvs kraften i x-riktningen blir fortfarande = spännkraften:

$$F_{1x} = -F_{2x} = F$$

Mekaniska vågor
Våg hastighet

Nu är det dags att använda derivatan i ändpunkterna:



$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

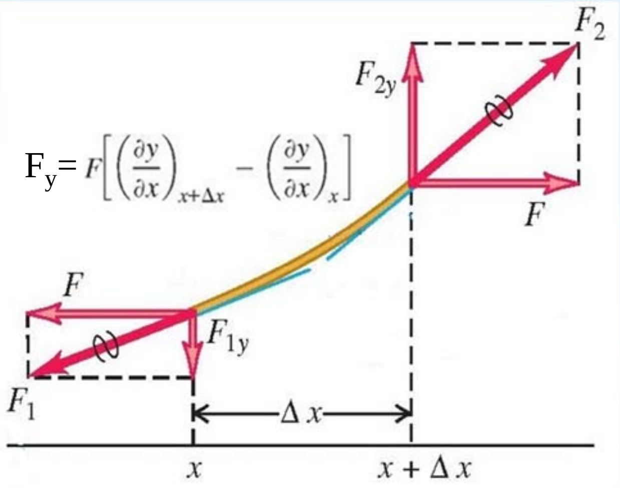
$$\frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Den totala kraften i y-riktningen blir då:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]$$

Mekaniska vågor
Våg hastighet

Nu är det dags att använda Newtons lag:



μ: Strängens massa per längdenhet.

m = μ Δx är massan av sträng elementet.

F = ma (Newtons lag) där accelerationen är andra derivatan med avseende på tiden:

$$F_y = ma = \mu\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

men vi har tidigare visat att:

$$F_y = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]$$

$$\boxed{F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \mu\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Mekaniska vågor
Våg hastighet

Vår nya ekvation kan skrivas om:

$$F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \mu\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Dividera med $F\Delta x$

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

När Δx går mot noll är detta ekvivalent med andra derivatan med avseende på x.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

+

Man kan nu kombinera denna ekvation med vågekvationen:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

=

Resultatet är att våghastigheten blir:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

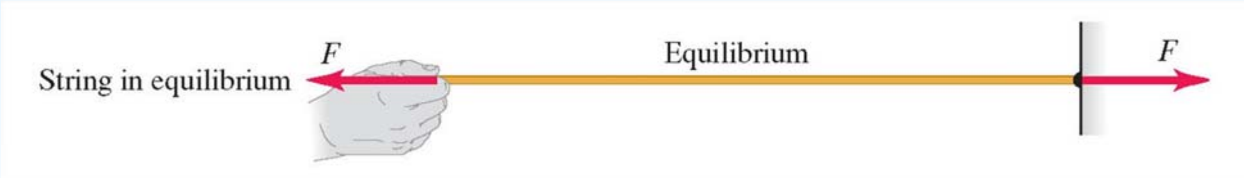
Mekaniska vågor
Våg hastighet

Slutsats: Våghastigheten beror på två saker:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Spännkraften

Strängens massa per längdenhet



Mer generellt:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Restoring force returning the system to equilibrium}}{\text{Inertia resisting the return to equilibrium}}}$$

Mekaniska vågor
Problem

Del 8. Problem lösning

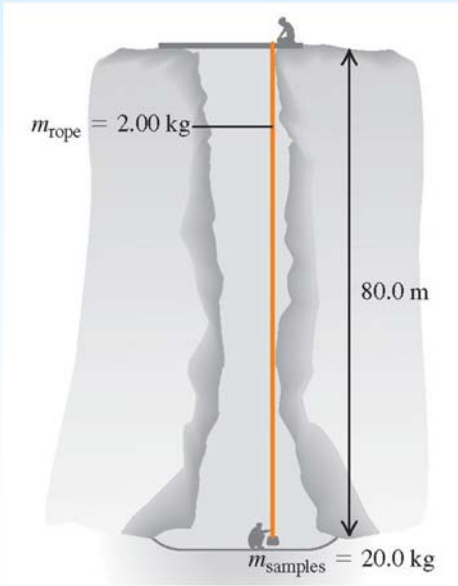
$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\text{si}\cancel{n}\,x =$$

$$six = 6$$

Mekaniska vågor
Problem

Mannen i hålet skickar en signal genom att göra en knyck på ett rep i vars ände det hänger 20 kg. Vad blir hastigheten av vågen i repet ? Om repet sätts i sinus svängning med f=2Hz hur många våglängder får plats på repet?



The tension in the rope due to the box is

$$F = m_{box}g = (20.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 196\ \text{N}$$

and the rope's linear mass density is

$$\mu = \frac{m_{rope}}{L} = \frac{2.00\ \text{kg}}{80.0\ \text{m}} = 0.0250\ \text{kg/m}$$

the wave speed is

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}} = \sqrt{\frac{196\ \text{N}}{0.0250\ \text{kg/m}}} = 88.5\ \text{m/s}$$

the wavelength is

$$\boxed{\lambda = \frac{v}{f}} = \frac{88.5\ \text{m/s}}{2.00\ \text{s}^{-1}} = 44.3\ \text{m}$$

There are (80.0 m)/(44.3 m) = 1.81 wavelengths (that is, cycles of the wave) in the rope.

Mekaniska vågor
Effekt

Del 9. Effekt
= Arbete per tidsenhet

Buggatti Veyron

Effekt = 1200 hästkrafter
Effekt = 880 kW
Effekt = 880 kJ/s

Mekaniska vågor
Effekt

Vågens effekt (P): Den momentana hastigheten med vilken energi transporteras av vågen. (P = energi per tidsenhet)
Enheter: W or J/s

Allmänt för effekt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$ (instantaneous rate at which force $\vec{F}$ does work on a particle)

Vågens effekt (P):

$$\boxed{P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t)}$$

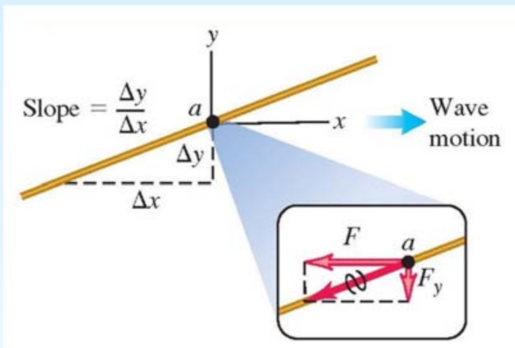
y är den enda riktningen där hastigheten inte är noll

Mekaniska vågor
Effekt

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \longrightarrow P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t)$$

$$F_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

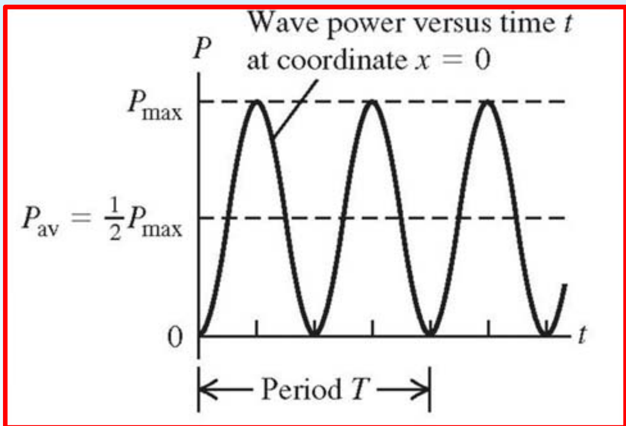


$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -kA\sin(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t)$$

Vågens effekt:

$$P(x,t) = Fk\omega A^2\sin^2(kx - \omega t)$$

Mekaniska vågor
Effekt



Vågens effekt:

$$P(x,t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$P_{max} = Fk\omega A^2 = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

&

$$P_{av} = \frac{1}{2}Fk\omega A^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Mekaniska vågor
Problem

Del 10. Problem lösning

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\mathrm{si}\cancel{n}\,x =$$

$$six = 6$$

Mekaniska vågor
Problem

Du viftar med ett rep upp och ner och skapar en sinusvåg med frekvensen 2.00 Hz, amplituden 0.075 m och våghastigheten 12.0 m/s. Repet väger 250 gram per meter och är spänt med kraften 36.0 N.

Beräkna den maximala effekten och medeleffekten som behövs !

A: Amplitude = 0.075 m

f: Frequency = 1 / T = 2.00 Hz

v: Wave speed = λ / T = 12.0 m/s

T: Period = 1 / f = 0.5 s

λ: Wavelength = v T = 6.00 m

ω: Angular frequency = 2 π f = 4π

k: Wave number = 2 π / λ = ⅓π

μ: Linear mass density = 0.250 kg/m

F: Tension = 36.0 N

Lösning:

$$\begin{aligned} \boxed{P_{\max} = \sqrt{\mu F}\omega^2 A^2} \\ &= \sqrt{(0.250\ \mathrm{kg/m})(36.0\ \mathrm{N})}(4.00\pi\ \mathrm{rad/s})^2(0.075\ \mathrm{m})^2 \\ &= 2.66\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

$$P_{\mathrm{av}} = \tfrac{1}{2}P_{\max} = \tfrac{1}{2}(2.66\ \mathrm{W}) = 1.33\ \mathrm{W}$$

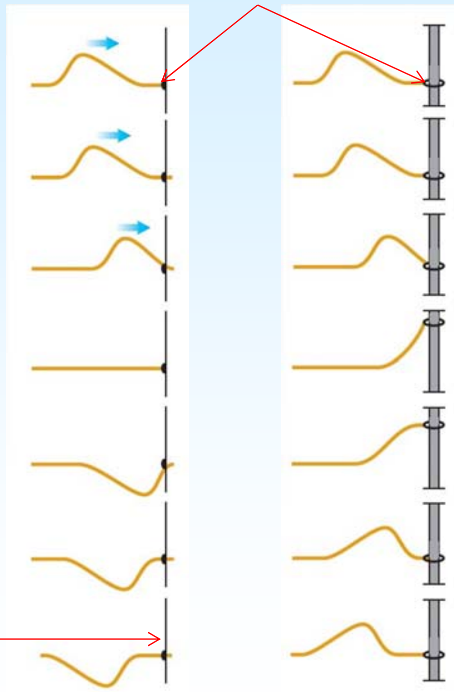
Mekaniska vågor
Reflektioner

Del 11. Reflektion av vågor

Mekaniska vågor
Reflektioner

Randvillkor

Reflektion av en våg



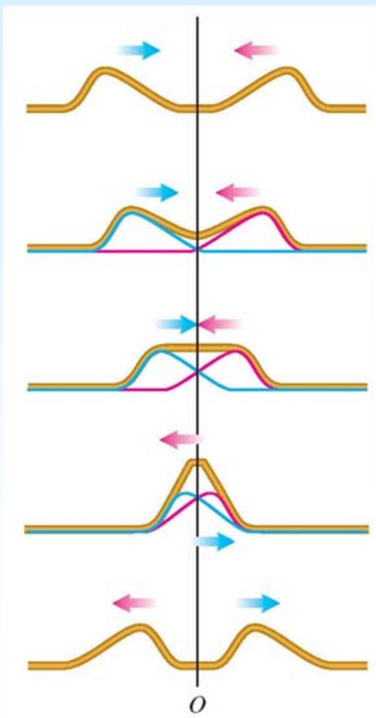
Ställningen orsakar en motriktad kraft som inverterar vågen.

Mekaniska vågor
Reflektioner

Vågfunktionen av två vågor ges typiskt av summan av de två individuella vågfunktionerna.

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Detta kallas för superpositions principen !

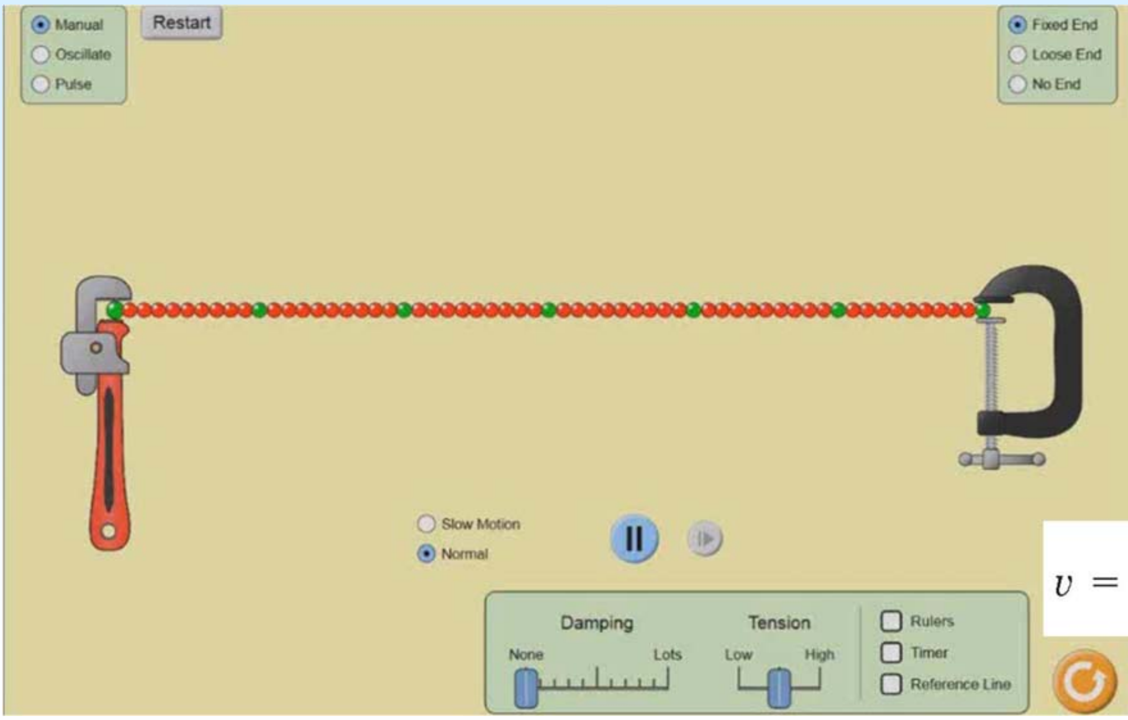


Denna princip gäller när vågekvationen för vågorna är linjär dvs den innehåller bara funktionen y(x,t) till första ordningen.

Sinusvågor t.ex. följer superpositions principen för deras vågekvation är linjär:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Mekaniska vågor
Reflektioner



$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

https://phet.colorado.edu/en/simulation/wave-on-a-string

Mekaniska vågor:
Stående vågor

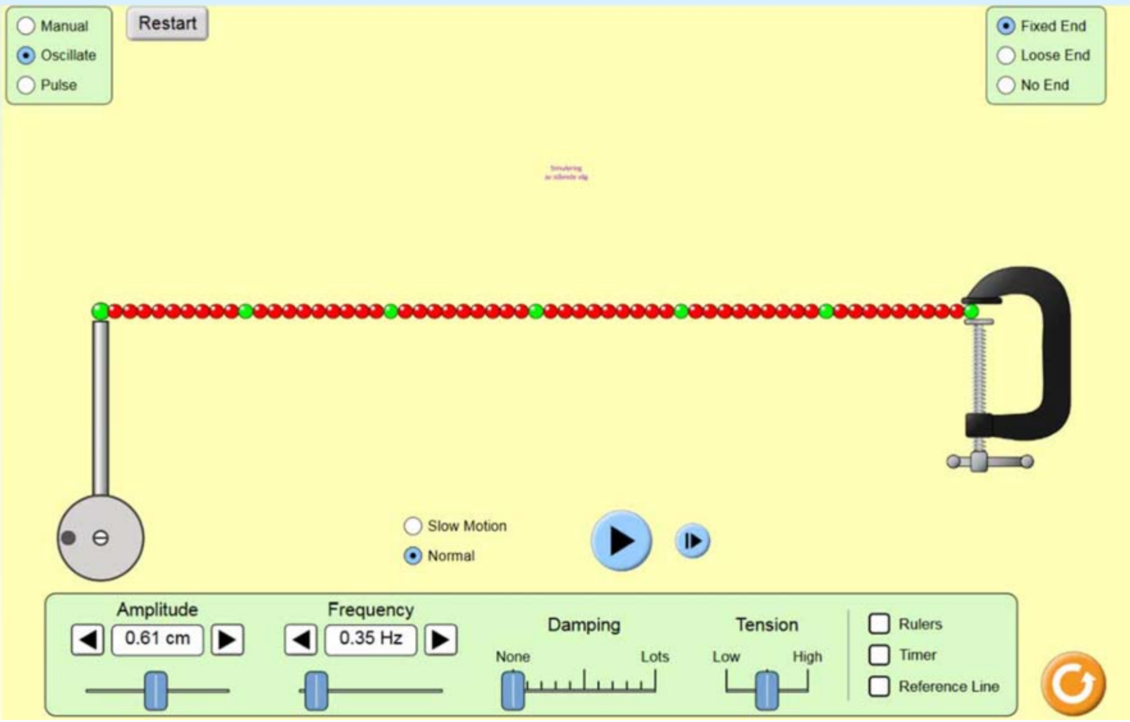
Del 12. Stående vågor

https://www.youtube.com/watch?v=NpEevfOU4Z8

Mekaniska vågor:
Stående vågor

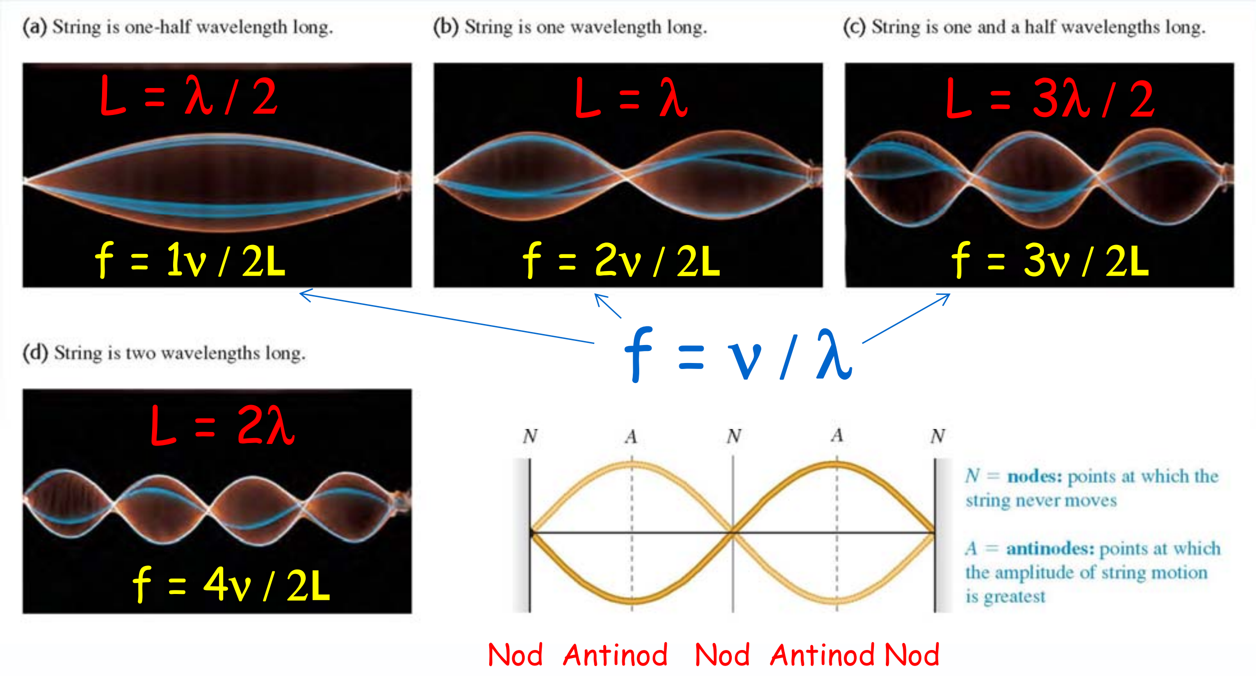
https://www.youtube.com/watch?v=-gr7KmTOrx0

Mekaniska vågor:
Stående vågor

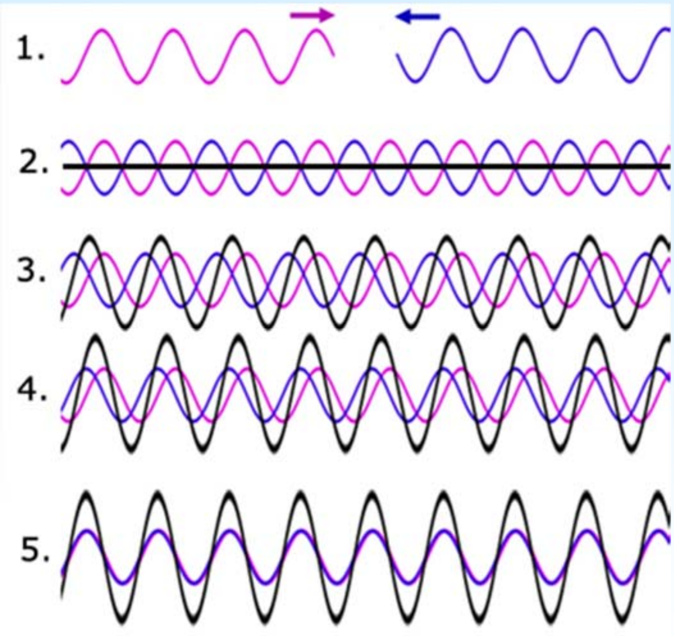


Mekaniska vågor: Stående vågor

L = längden av strängen



Mekaniska vågor: Stående vågor



$$y_1(x,t) = -A\cos(kx + \omega t)$$
$$y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

Vid olika tidpunkter

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

Mekaniska vågor: Stående vågor

Superposition av två vågor:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[-\cos(kx+\omega t) + \cos(kx-\omega t)]$$

+

Trigonometri: $\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$

=

$$Y(x,t)=A[\cancel{-\cos(kx)\cos(\omega t)}+\sin(kx)\sin(\omega t) \cancel{+\cos(kx)\cos(\omega t)}+\sin(kx)\sin(\omega t)]$$

=

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A \sin kx \, \sin \omega t$$

Mekaniska vågor: Stående vågor

Vad är hastigheten och accelerationen ?

Vågfunktion:

$$y(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Hastighet:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Rightarrow v_y(x,t) = 2A\omega \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Acceleration:

$$a_y(x,t) = \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow a_y(x,t) = -2A\omega^2 \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Mekaniska vågor: Stående vågor

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A \sin kx \ \sin \omega t}$$

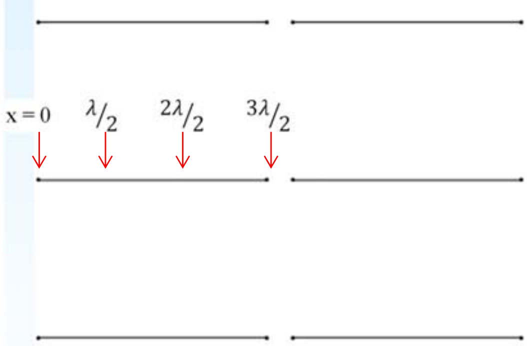
Noderna ges av $\sin(kx) = 0$

$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi,$

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{4\pi}{k},$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{4\lambda}{2}, \quad \text{eftersom } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$x = 0, \frac{v}{2f}, \frac{2v}{2f}, \frac{3v}{2f}, \frac{4v}{2f}, \quad \text{eftersom } \lambda = \frac{v}{f}$$



Mekaniska vågor: Sträng instrument

Del 13. Sträng instrument

Octobas fiol

https://www.youtube.com/watch?v=12X-i9YHzmE

Mekaniska vågor: Sträng instrument

Strängar med längden L som har noder i båda ändar:

Nodes when $\sin(kx) = 0$

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \ldots = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots$$

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

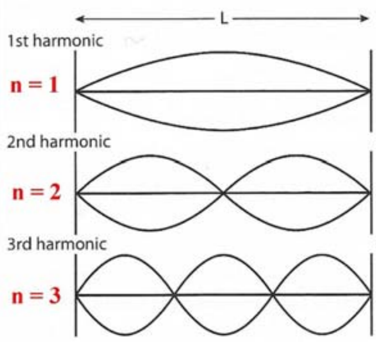
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\lambda = 2L / n = v / f$$

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

f_1, f_2, f_3.... Harmoniska frekvenser
f_1: Grundfrekvensen
f_2, f_3, f_4.... Övertoner

$\lambda_n = \frac{2}{n}L$ $\quad f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ ← samma för alla n



En halv period

$\lambda_1 = \frac{2}{1}L \quad f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$

En hel period

$\lambda_2 = \frac{2}{2}L \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2f_1$

Tre halva perioder

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{2/3L} = 3f_1$

Mekaniska vågor: Sträng instrument

$$f_1 = v/2L$$

$$v = \sqrt{F/\mu}$$

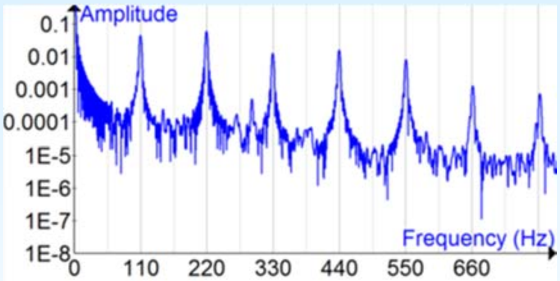
$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Lång sträng: Låg frekvens
Tjock sträng: Låg frekvens
Stor spännkraft: Hög frekvens

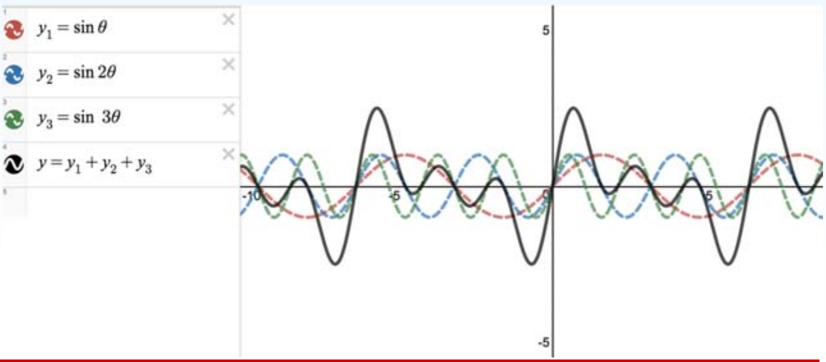
Mekaniska vågor:
Sträng instrument

En sträng i ett sträng instrument producerar normalt inte bara en grundfrekvens men en överlagring av alla harmoniska frekvenser.

Amplituden för de olika frekvenserna varierar:



Den resulterande vågen har ett komplicerat utseende:



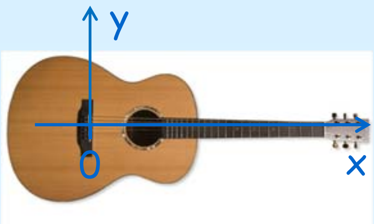
Mekaniska vågor:
Sträng instrument

Del 14. Problem lösning

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\,\mathrm{si}\cancel{n}\,x =$$

$$six = 6$$



En sinusvåg rör sig i negativ x-riktning längs en gitarr sträng med hastigheten 143 m/s. Amplituden är 0.750 mm och frekvensen 440 Hz.

Vågen reflekteras vid x=0 och bildar en stående våg.

Vad blir funktionen som beskriver strängens rörelse i y-led ?

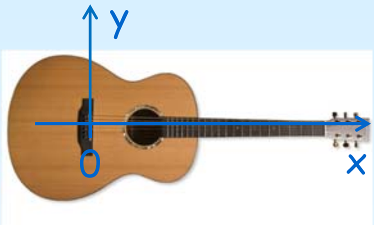
$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)$$

$$A = 0.750\ \mathrm{mm} = 7.50 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} = (2\pi\ \mathrm{rad})(440\ \mathrm{s}^{-1}) = 2760\ \mathrm{rad/s}$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}} = \frac{2760\ \mathrm{rad/s}}{143\ \mathrm{m/s}} = 19.3\ \mathrm{rad/m}$$

Mekaniska vågor
Problem



v = 143 m/s
f = 440 Hz
A = 0.075 m
ω = 2760 rad/s
k = 19.3 rad/m

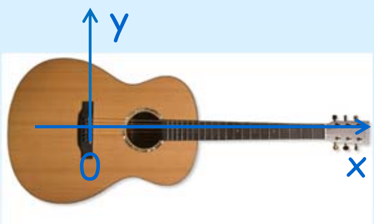
Var blir det noder på strängen ?

Det blir noder för $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots$

$\boxed{f = v / \lambda}$ $\Rightarrow$ $\lambda = v / f$ = 143 / 440 = 0.325 m

det blir noder för x = 0, 0.163 m, 0.325 m,

Mekaniska vågor
Problem



v = 143 m/s
f = 440 Hz
A = 0.075 m
ω = 2760 rad/s
k = 19.3 rad/m

Vad blir amplituden av den stående vågen ?
Vad blir den maximala hastigheten och den maximala accelerationen ?

$y(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$ Amplitud = 2A = 0.15 m

$v_y(x,t) = 2A\omega \sin(kx) \cos(\omega t)$

$v_y(x,t)_{max} = 2A\omega = 4.14 \text{ m/s}$

$a_y(x,t) = -2A\omega^2 \sin(kx) \sin(\omega t)$

$a_y(x,t)_{max} = 2A\omega^2 = 11426 \text{ m/s}^2$

Mekaniska vågor
Problem

En octobas fiol har en sträng som är 2.50 m lång och som väger 40.0 gram per meter.

Vilken spännkraft behövs för att grundfrekvensen ska bli 20.0 Hz ?

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad f_n = \frac{nv}{2L}$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = 4\mu L^2 f_1{}^2 = 4(40.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m})(2.50\,\mathrm{m})^2(20.0\,\mathrm{s}^{-1})^2 = 400\ \mathrm{N}$$

Mekaniska vågor
Problem

f_1 = 20.0 Hz
L = 2.50 m
μ = 40.0 g/m
F = 400 N

Vad blir frekvensen och våglängden för den andra harmoniska frekvensen ?

Vad blir frekvensen och våglängden för den andra övertonen ?

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$f_2 = 2f_1 = 2(20.0\ \mathrm{Hz}) = 40.0\ \mathrm{Hz}$$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = \frac{2(2.50\ \mathrm{m})}{2} = 2.50\,\mathrm{m}$$

Den andra övertonen är den andra över grundfrekvensen d.v.s. n = 3

$$f_3 = 3f_1 = 3(20.0\ \mathrm{Hz}) = 60.0\ \mathrm{Hz}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2(2.50\ \mathrm{m})}{3} = 1.67\ \mathrm{m}$$

Mekaniska vågor
Problem

f_1 = 20.0 Hz
L = 2.50 m
μ = 40.0 g/m
F = 400 N
λ_1 = 1.25 m

Strängen vibrerar med sin grundfrekvens.

Vad blir frekvensen och våglängden av ljudet som den skickar ut ?

Ljudets hastighet är 344 m/s.

$$v = \lambda / T = \lambda f$$

$$\lambda = v / f$$

$$f = f_1 = 20.0 \text{ Hz}$$

$$\lambda_{1(\text{sound})} = \frac{v_{\text{sound}}}{f_1} = \frac{344 \text{ m/s}}{20.0 \text{ Hz}} = 17.2 \text{ m}$$